Algebra lineare – Geometria 1

10 gennaio 2006

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R^3}$ si considerino

- l'omomorfismo f: $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R^4}$ tale che

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R^3} \quad f(x, y, z) = (x + y,\ x - y + z,\ 2x + z,\ 2y - z)$$

- i vettori $v_1 = (h, 1, 0)$, $v_2 = (1, h, 0)$, $v_3 = (0, h, 1)$,

- il sottospazio $U = < v_1, v_2, v_3 >$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.

i) Si costruiscano gli spazi vettoriali Im f e ker f.
ii) Dopo avere verificato che il vettore w appartiene a Im f, si individui l'insieme P delle preimmagini di w e si stabilisca se P è un sottospazio di $\mathbf{R^3}$.
Al variare del parametro h:
iii) si determini una base e la dimensione del sottospazio U;
iv) si costruisca un complemento diretto per U;
v) si costruisca il sottospazio $f(U)$ e se ne determini la dimensione.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} x + z & = 1 - h \\ x + (h+1)y & = 1 \\ x + hy + z & = 0 \\ (h+1)y - z & = 1 \end{cases}$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.

Geometria – Geometria 2

10 gennaio 2006

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche passanti per i punti A(2, 1), B(1, 2), O(0, 0) e tangenti alla retta $x + y = 0$.

i) Si individuino le parabole non degeneri e le circonferenze del fascio Φ; delle circonferenze si determinino il centro e il raggio.

ii) Si scriva l'equazione dell'iperbole equilatera K del fascio Φ; si determinino le equazioni degli asintoti di K.

iii) Si individui la conica Σ non degenere del fascio Φ rispetto alla quale sono coniugati i punti P(1, -1) e Q(2, 1); si riconosca Σ.

iv) Si individui la conica Γ non degenere del fascio Φ che ha un asintoto parallelo alla retta r: $3x - y + 7 = 0$; si determini l'equazione di tale asintoto.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

il piano π: $x - y + z + 8 = 0$ e

le rette r: $x + z + h - 1 = x + (h+1)y - 1 = 0$ e s: $x + hy + z = (h+1)y - z - 1 = 0$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.

i) Al variare di h si stabilisca la posizione reciproca delle rette r e s.

ii) Nei casi in cui r e s sono complanari, si determini l'equazione del piano da esse individuato.

iii) Posto $h = -1$, dopo avere verificato che le rette r e s sono tra loro sghembe, si determinino le equazioni della retta perpendicolare ed incidente a r e a s e si determini la minima distanza tra tali due rette.

iv) Posto $h = 2$, si stabilisca la posizione reciproca tra la retta s e il piano ρ passante per r e parallelo al piano π.