Geometria – Geometria 2

10 aprile 2006

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si consideri il fascio di coniche

$$\Phi: x^2 + (2k+1)xy - (3+k)y^2 + (1-k)y - 4x + 4 = 0.$$

i) Si riconoscano le coniche generatrici del fascio Φ, si stabilisca la natura del fascio, se ne determinino i punti base e le coniche degeneri.
ii) Si stabilisca, giustificando la riposta, se nel fascio Φ vi sono circonferenze o parabole non degeneri.
iii) Si individui l'iperbole equilatera Σ del fascio; si determinino le equazioni degli asintoti di Σ.
iv) Si determini l'equazione della conica Γ di Φ rispetto alla quale la polare di P(-2; 1) è tangente alla conica stessa. Si riconosca Γ.
v) Si individui l'equazione dell'iperbole K del fascio che ha un asintoto parallelo alla retta r: $x - 5y = 0$; si determini la direzione dell'altro asintoto di K.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

i piani α: $x + y - z = 0$, β: $x - y + 1 = 0$, γ : $x - y + 2 = 0$, δ : $2x - z = 0$

e la retta r: $2x - y = x + z = 2$.

i) Si stabilisca la natura dei fasci di piani Φ_1, generato da α e β, e Φ_2, generato da γ e δ.
ii) Si scriva l'equazione del piano π del fascio Φ_1 parallelo alla retta r.
iii) Si stabilisca se nel fascio Φ_1 esiste un piano perpendicolare alla retta r.
iv) Si stabilisca se esiste un piano comune ai fasci Φ_1 e Φ_2. In caso di risposta negativa, si determini la minima distanza tra le rette sostegno, rispettivamente, dei fasci Φ_1 e Φ_2.

Algebra lineare – Geometria 1

10 aprile 2006

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R_3}[x]$ si considerino

i sottoinsiemi $U = \{p(x) \in \mathbf{R_3}[x] \mid p(0) = 0\}$ e $V = \{p(x) \in \mathbf{R_3}[x] \mid p(k) = p(-k)\ \forall k \in \mathbf{R}\}$

e la funzione f: $\mathbf{R_3}[x] \to \mathbf{R_3}[x]$ tale che $\forall p(x) \in \mathbf{R_3}[x]$ $f(p(x)) = p(-x)$.

i) Si verifichi che U e V sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R_3}[x]$ e per ciascuno di essi si determini una base e la dimensione.
ii) Si costruiscano i sottospazi $U \cap V$ e $U + V$.
iii) Dopo avere verificato che f è un endomorfismo, se ne determini il nucleo Ker$f$ e l'immagine Imf e se ne scriva la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbf{R_3}[x]$.
iv) Si costruiscano i sottospazi $f(U)$ e $f(V)$ e si stabilisca se sono uno complemento diretto per l'altro.

2) Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che, se $B = (e_1, e_2, e_3)$ è la base canonica, si abbia:

$$f(e_3) = e_1 + 3e_3, \quad f(e_1 - e_3) = -2e_3, \quad f(-2e_1 + e_2 - e_3) = 2e_2 + e_3.$$

i) Si scriva come agisce l'endomorfismo f sul generico vettore $v = (x, y, z)$ di $\mathbf{R}^3$ e si costruisca la matrice di f rispetto alla base canonica.
ii) Si costruiscano i sottospazi Imf e Ker$f$; per ciascuno di essi si determinino una base e la dimensione.
iii) Si stabilisca se l'endomorfismo f è diagonalizzabile; in caso di risposta positiva, si diagonalizzi f.