Algebra lineare – Geometria 1

10 dicembre 2008

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri l'endomorfismo:

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c,d) & \longmapsto & (2a+3c, b+c, kd+a, kc), \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare la matrice della rappresentazione scalare di f_k rispetto alla base canonica;
2. determinare i valori di k per cui f_k non è un automorfismo;
3. per ciascuno dei valori di k trovati al punto precedente determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im}(f_k)$ e $\ker(f_k)$;
4. al variare di k determinare l'insieme $f_k^{-1}(\mathbf{v})$ delle preimmagini del vettore $\mathbf{v} = (1,1,-1,0)$ tramite f_k;
5. determinare i vettori $\mathbf{w}$ di $\mathbb{R}^4$ per cui $f_k(\mathbf{w})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e quelli per cui $f_k^{-1}(\mathbf{w})$ è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi:

$$U =< (k, k+1, 0), (1,1,1), (0,k,0), (1,2,1-k) >$$
$$W = \{(\alpha+\beta+2\gamma, 0, \beta+\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$$

dove k è un parametro reale. Al variare di k determinare:

1. la dimensione e una base di U e di W;
2. i valori di k, se esistono, per cui W è un sottospazio vettoriale di U.

Posto ora $k = 0$ determinare:

3. la dimensione e una base per $U \cap W$ e per $U + W$;
4. un complemento diretto per W.

Geometria 2

10 dicembre 2008

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica b_k definita, per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, da:

$$b_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (k+1)x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3,$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare la matrice che rappresenta b_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
2. determinare, al variare di k, una base e la dimensione per il radicale di b_k;
3. determinare i valori di k per cui b_k è un prodotto scalare euclideo.

Posto ora $k = 0$, dopo aver verificato che

$$\mathscr{B} = \big(\mathbf{v_1} = (1,0,0), \mathbf{v_2} = (1,0,1), \mathbf{v_3} = (0,2,1)\big)$$

è una base di $\mathbb{R}^3$:

4. determinare una base $\mathscr{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a b_0 che contenga il maggior numero possibile di vettori di $\mathscr{B}$;
5. nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R}^3, b_0)$ riferito alle coordinate cartesiane associate alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ determinare un'equazione della retta r passante per $P = (1,1,2)$ e ortogonale rispetto a b_0 ai piani di giacitura $< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} >$.

Esercizio 2. Nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ si consideri il fascio di coniche individuato da:

$$\mathscr{C}_1 : \ x_1x_2 - x_2x_3 = 0, \qquad \mathscr{C}_2 : \ x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0.$$

1. Determinare le coniche degeneri del fascio e le coordinate dei punti base; interpretare geometricamente il fatto che una delle coniche degeneri compare con molteplicità 2;
2. giustificare il fatto che le coniche degeneri del fascio si spezzano in due rette tra loro ortogonali;
3. determinare un'equazione cartesiana per il luogo $\mathscr{C}$ descritto dai centri delle coniche del fascio al variare di k;
4. studiare il luogo $\mathscr{C}$.