Geometria – Geometria 2

11 gennaio 2005

1) Nel piano proiettivo euclideo, in cui è fissato un sistema di coordinate omogenee, si considerino le rette r: $x_1 + x_2 = 0$, s: $x_3 = 0$ e i punti O = [(0, 0, 1)], P = [(1, 1, 0)].
i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche che sono tangenti in O alla retta r e in P alla retta s.
ii) Si verifichi che le coniche di Φ sono tutte e sole parabole e che le parabole non degeneri hanno lo stesso asse. Si determini l'equazione di tale asse.
iii) Si individui la conica Σ del fascio Φ rispetto alla quale sono coniugati i punti A = [(1, 0, 1)] e B = [(2, 0, 1)].
iv) Si determini l'equazione della retta tangente alla conica Σ nel punto T = [(4, 0, 3)].
v) Si scriva l'equazione della circonferenza tangente alla conica Σ nei punti in cui essa è intersecata dalla retta t: $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{E}_3$, n cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sono date le rette

$$r: x + kz - 1 = (2k + 1)y + z = 0 \quad \text{e} \quad s: 2x - ky + z = x + 3y + (k + 1)z = 1,$$

ove k è un parametro reale.
i) Al variare del parametro k si stabilisca la posizione reciproca delle rette r e s. Esistono valori di k per i quali le due rette sono tra loro ortogonali?
ii) Per i valori di k per i quali le due rette sono complanari si determini l'equazione del piano da esse individuato.
iii) Posto k = -1, si verifichi che le rette r e s sono tra loro sghembe e si determini la loro minima distanza.
iv) Posto k = 1, dopo avere verificato che le rette r e s sono incidenti, si scriva l'equazione delle sfere tangenti alle due rette nel loro punto di intersezione e aventi raggio 2.

Algebra lineare – Geometria 1

11 gennaio 2005

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{Mat_2(R)}$ si considerino

la matrice $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, il sottoinsieme $U = \{A \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid AH = HA\}$ e

l'omomorfismo f: $\mathbf{Mat_2(R)} \to \mathbf{R^4}$ tale che

$f(E_{11}) = (0, 2, 0, 1)$, $f(E_{11} + E_{12}) = (1, 2, 0, 0)$, $f(E_{12} + E_{21}) = (1, 0, 1, -1)$, $f(E_{21} + E_{22}) = (2, 2, 2, -1)$

ove $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ è la base canonica di $\mathbf{Mat_2(R)}$

i) Dopo avere verificato che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{Mat_2(R)}$, se ne determini una base e la dimensione.
ii) Si costruisca un complemento diretto per U in $\mathbf{Mat_2(R)}$.
iii) Detto W il sottospazio delle matrici antisimmetriche di $\mathbf{Mat_2(R)}$, si costruiscano i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$; di ciascuno di tali sottospazi si determinino una base e la dimensione.
iv) Dopo avere scritto come agisce l'omomorfismo f sulla generica matrice di $\mathbf{Mat_2(R)}$, si stabilisca se l'omomorfismo f è iniettivo o suriettivo e si determini $f(U)$.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} (h+1)x + (h+2)y + (h+3)z = 2h + 3 \\ x + y + hz = h \\ 3x + 2y + z = -h \end{cases}$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.