Algebra lineare – Geometria 1

11 aprile 2007

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ si considerino

i sottoinsiemi $W = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$ e $U = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(x) = p(-x)\}$

l'endomorfismo f: $\mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}_3[x]$ tale che $\forall p(x) \in \mathbf{R}_3[x]$ $f(p(x)) = -p(-x)$.

i) Dopo avere verificato che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$, se ne determini una base e la dimensione.
ii) Dopo avere verificato che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$, se ne determini una base e la dimensione.
iii) Si costruiscano i sottospazi vettoriali $W+U$ e $W \cap U$.
iv) Si costruisca un complemento diretto per W.
v) Si scriva la rappresentazione matriciale dell'endomorfismo f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$ e si verifichi che f è un automorfismo.
vi) Si costruiscano i sottospazi vettoriali $f(W)$ e $f(U)$ e si verifichi se tali sottospazio sono in somma diretta.
vii) Indicato con V il sottoinsieme dei polinomi $p(x)$ di $\mathbf{R}_3[x]$ tali che $f(p(x)) = p(x)$, si verifichi che V è un sottospazio di $\mathbf{R}_3[x]$ e se ne determini la dimensione.

2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si consideri la funzione $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad f(x, y, z) = (2x, (a+b)x + ay, bx + ay + z)$$

dove $a, b \in \mathbf{R}$ sono parametri.
i) Si verifichi che la funzione f è un endomorfismo per ogni valore dei parametri reali.
Al variare di a, b in $\mathbf{R}$
ii) si determinino le dimensioni dei sottospazi $\mathrm{Im}f$ e $\mathrm{Ker}f$;
iii) si stabilisca se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
Posto $a = 2$ e $b = -2$, dopo avere constatato che l'endomorfismo f è diagonalizzabile, lo si diagonalizzi.

Geometria – Geometria 2

11 aprile 2007

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sono assegnati

le rette r: $x + y - 1 = 0$ e a: $x + 2y - 3 = 0$

il punto P(0; 1).

i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di iperboli tangenti a r nel punto P e aventi per asintoto la retta a.
ii) Si individui l'iperbole equilatera non degenere K del fascio Φ e si scriva l'equazione dell'ulteriore asintoto di K.
iii) Si scriva l'equazione dell'iperbole non degenere Ω del fascio Φ che ha un asintoto parallelo all'asse x; si scriva l'equazione di tale asintoto.
iv) Si determini l'iperbole non degenere Γ del fascio Φ che ha centro in C(7; -2). Si individui il punto T di intersezione delle tangenti alla conica Γ nei punti in cui essa è intersecata dalla retta t: $x + 1 = 0$.
v) Siano Q e R gli ulteriori punti di intersezione, oltre a P, della generica iperbole del fascio Φ con le rette, rispettivamente, $x = 0$ e $y = 1$. Si scriva l'equazione cartesiana del luogo Λ descritto dal centro della circonferenza passante per P, Q, R, al variare dell'iperbole nel fascio Φ. Si riconosca Λ.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino le rette

r: $x = y = 0$

s: $y = z = 0$

t: $x - y = z - y = 1$.

i) Si stabilisca la posizione reciproca tra le rette r, s, t considerate a due a due.
ii) Dopo avere constatato che le rette r e s sono incidenti in un punto, si scriva l'equazione del piano individuato da tale punto di incidenza e dalla retta t.
iii) Dopo avere constatato che le rette s e t sono tra loro sghembe, si individui la retta n perpendicolare ed incidente ad entrambe le rette e si determini la minima distanza tra esse.
iv) Si stabilisca la posizione reciproca tra n e r.
v) Si calcoli la distanza dell'origine del riferimento dalla retta n.
vi) Si scriva l'equazione del luogo descritto dalle rette incidenti alle rette r, s e t.