Algebra lineare – Geometria 1

11 luglio 2007

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si considerino

i vettori $u_1 = (h, 1, h)$, $u_2 = (0, h+1, h)$, $w_1 = (1, h, 1)$, $w_2 = (1, 1-h, 1-h)$,

i sottospazi $U = < u_1, u_2 >$ e $W = < w_1, w_2 >$

la funzione f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\forall(x, y, z)\in \mathbf{R}^3$ $f(x, y, z) = (x-h z, hy, hx-z)$

ove $h\in \mathbf{R}$ è un parametro.
Al variare del parametro reale h
i) si costruiscano i sottospazi $U + W$ e $U \cap W$;
ii) si determini un complemento diretto per U;
iii) si stabilisca se il vettore $v = (1, h-2, 0)$ appartiene a W;
iv) si verifichi che f è un endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ e si costruiscano i sottospazi Imf e Ker$f$;
v) si stabilisca se U e W sono sottospazi di Imf o di Ker$f$.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} hx + (1+h)y + (h+2)z & = 3h-1 \\ 3x + 2y + z & = 2-h \\ x + y + (h-1)z & = h-1 \end{cases}$$

ove $h\in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.

Geometria – Geometria 2

11 luglio 2007

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sono assegnati

la retta a: $x - y = 0$

e il punto P(3; 1).

i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di iperboli equilatere passanti per il punto P e aventi per asintoto la retta a.
ii) Si individui l'iperbole non degenere K del fascio Φ avente il centro sulla retta r: $2x - y - 1 = 0$.; rispetto a tale conica si determini il polo della retta s: $4x + y = 0$.
iii) Si scriva l'equazione dell'iperbole non degenere Ω del fascio Φ rispetto alla quale il polo della retta q: $5x - y + 10 = 0$ è il punto Q(-2; 0). Si stabilisca se la conica Ω è tangente ad una parabola non degenere nei punti in cui Ω è intersecata dalla retta $y = 0$.
iv) Si verifichi che le direzioni delle rette t: $x - 2y - 1 = 0$ e t': $2x - y + 1 = 0$ sono coniugate rispetto ad ogni conica non degenere del fascio Φ.
v) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo Λ descritto dal centro della generica iperbole del fascio Φ.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino il punto T(-1; -1; 0) e piani

α: $hx + (h+1)y + (h+2)z = 3h-1$

β: $3x + 2y + z = 2-h$

γ: $x + y + (h-1)z = h-1$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.

i) Al variare del parametro h si determini la posizione reciproca dei piani α, β, γ, specificando anche i casi in cui i piani sono a due a due perpendicolari.
Posto $h = -1$:
ii) si scriva l'equazione della sfera Σ tangente al piano γ nel punto T e con centro appartenente alla retta r: $x = 2 - y = 5 + z$;
iii) si stabilisca la posizione reciproca tra la sfera Σ e ciascuno dei piani α e β;
iv) constatato che il piano α seca la sfera Σ, si determinino il centro e il raggio della circonferenza intersezione di Σ con α;
v) verificato che i piani α e β sono tra loro incidenti e detta p la retta comune a tali piani, si calcoli la distanza del punto T dalla retta p.