Algebra lineare – Geometria 1

11 luglio 2008

Esercizio 1. Si considerino la funzione:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ (\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto \big(2\beta - \alpha - \gamma\big) + \big((k-1)\beta + (1-k)\gamma - \alpha\big)x + \big(3\beta + (k-2)\gamma\big)x^2 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale, e il sottospazio $U =< 1 + x + 3x^2 >$ di $\mathbb{R}_2[x]$.

Dopo aver verificato che f è un omomorfismo per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ si determinino al variare di k:

1. la matrice di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}_2[x]$;
2. le dimensioni di $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$;
3. i valori di k per cui U è un sottospazio di $\mathrm{Im}(f)$.
4. Posto $k = 2$, si determinino una base per $\ker(f)$ e per $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & k+3 \\ 0 & 1 & k+6 & 1 \\ k+5 & 2 & k+3 & k \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,4}(\mathbb{Z}_7),$$

dove k è un parametro libero di variare in $\mathbb{Z}_7$.

1. Si discuta la risolubilità del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in $\mathbb{Z}_7$, specificando il numero di soluzioni;
2. posto $k = 0$ si determini l'insieme S delle soluzioni.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottoinsiemi:

$$U = \{(\alpha, k\beta, 0, -\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
$$W =< (0,1,0,0), (0,2,0,-1), (0,0,k,2k) >,$$

dove k è un parametro reale. Al variare di $k \in \mathbb{R}$:

1. Stabilire se U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$;
2. determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $U + W$ e $U \cap W$ e stabilire per quali valori di k la somma è diretta.
3. Posto $k = 1$ determinare un complemento diretto di U in $\mathbb{R}^4$.

Geometria 2

11 luglio 2008

Esercizio 1. Nel piano prioettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si consideri la curva $\mathscr{C}$ di equazione

$$\mathscr{C}: \; x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 = 0.$$

1. Riconoscere la conica $\mathscr{C}$ e studiarla;
2. determinare la circonferenza tangente a $\mathscr{C}$ nei suoi punti $P_1 = [(1,3,1)]$ e $P_2 = [(1,1,1)]$;
3. determinare un'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti P_1 e P_2 e le coniche degeneri di tale fascio.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ riferito ad un sistema di coordiante cartesiane ortogonali si considerino le rette

$$r: \begin{cases} y = 2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}, \qquad s: \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

1. Si determini la mutua posizione delle rette r ed s;
2. si determini un'equazione cartesiana del luogo $\mathscr{L}$ descritto dalla rotazione della retta r attorno alla retta s;
3. si determinino le equazioni cartesiane della retta passante per $P = (1, 2, 0)$ ortogonale e incidente ad s.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si consideri la forma bilineare simmetrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + kx_3y_3 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - kx_3y_1 - kx_1y_3 - 2kx_3y_2 - 2kx_2y_3$$

dove k è un parametro reale. Al variare di k determinare:

1. la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
2. il radicale della forma bilineare f;
3. l'insieme $\mathcal{I}$ dei vettori di $\mathbb{R}^3$ isotropi rispetto a f e stabilire se esistono valori di k per cui $\mathcal{I}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
4. Posto $k = 1$ determinare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a f.