Algebra lineare – Geometria 1

11 settembre 2007

1) Sono dati gli spazi vettoriali reali $\mathbf{R}_2[x]$ e $\mathbf{R}^3$; inoltre, si considerino

il sottoinsieme $W = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(-x) = p(x+1)\}$

l'omomorfismo f: $\mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}^3$ tale che $\forall (a + bx + cx^2) \in \mathbf{R}_2[x]$

$$f(a + bx + cx^2) = (a + 2b + c,\ b + c,\ a + 2b + c).$$

i) Dopo avere verificato che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$, se ne determini una base e la dimensione.
ii) Si costruisca un complemento diretto per W.
iii) Si individui il sottospazio $f(W)$.
iv) Si determini lo spazio vettoriale $W \cap \mathrm{Ker} f$.
v) Detto U il sottospazio vettoriale dai polinomi $p(x)$ di $\mathbf{R}_2[x]$ tale che $p(0) = 0$, si costruisca lo spazio vettoriale $W+U$ e si dica se tale somma è diretta.
vi) Si determinino i valori del parametro reale h tali per cui il vettore $v = (1 + h, 1 - h, 3 - h)$ appartiene a $\mathrm{Im} f$; per tali valori si costruisca l'insieme delle preimmagini di v.

2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si consideri la funzione f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$

$$f(x, y, z) = ((3-h)x + (h-2)y + z,\ x + z,\ 2y + (3-h)z)$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Al variare del parametro reale h
i) si verifichi che f è un endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ e si costruiscano i sottospazi vettoriali $\mathrm{Im} f$ e $\mathrm{Ker} f$;
ii) si stabilisca per quali valori del parametro h l'endomorfismo f ammette 1 come autovalore;
iii) per i valori del parametro determinati in (ii) si dica se l'endomorfismo è diagonalizzabile e, in caso di risposta positiva, lo si diagonalizzi.

Geometria – Geometria 2

11 settembre 2007

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sono assegnati

la circonferenza Γ: $x^2 + y^2 - 4y = 0$

e il punto P(2; 6).

i) Detti T_1 e T_2 i punti di contatto delle tangenti alla circonferenza Γ condotte da P, si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche che sono tangenti a Γ nei punti T_1 e T_2.
ii) Si stabilisca se nel fascio vi sono parabole e circonferenze non degeneri.
iii) Si individui l'iperbole equilatera non degenere K del fascio Φ e si scrivano le equazioni degli asintoti di K.
iv) Si determini la conica Ω del fascio Φ avente centro in C(½; 3); dopo avere riconosciuto Ω, si scriva l'equazione della retta tangente a Ω in A(3; 0).
v) Si individui la conica Σ del fascio Φ rispetto alla quale il punto R(2; 0) è il polo della retta r: $x + 5y - 12 = 0$; si determini il diametro coniugato, rispetto a Σ, del diametro d: $x + y - 3 = 0$.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

il punto A(1; 2; -1)

il piano π: $z = 0$

le rette r: $x = y - 1 = z + 2$ e s: $x + z = -y = 1$.

i) Dopo avere verificato che le rette r e s sono tra loro sghembe, si determinino le equazioni dei piani paralleli su cui esse giacciono, l'equazione della retta di minima distanza e tale distanza.
ii) Si calcoli la distanza del punto A dalla retta s.
iii) Si individui il piano τ passante per s che interseca il piano π nella retta t: $z - 2 = x + 3y = -2$.
iv) Si scrivano le equazioni delle sfere passanti per A, tangenti a π e aventi centro su r.
v) Si scriva l'equazione della retta p del piano π incidente sia alla retta r sia alla retta s.