Geometria – Geometria 2

12 luglio 2005

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino le rette r: $y = x + 1$ e t: $y = 2$ e i punti O(0, 0) e H(0, 2).
i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti alla retta t e passanti per i punti O, H e per il punto improprio della retta r.
ii) Si stabilisca per quali valori del parametro dell'equazione ridotta del fascio Φ si ottengono le ellissi, le parabole e le iperboli.
iii) Si individui l'equazione dell'iperbole equilatera Σ di Φ; si determinino le equazioni degli asintoti di Σ.
iv) Detta K la generica conica non degenere di Φ, si determini il punto di intersezione A, distinto dell'origine, di K con l'asse delle ascisse. Si indichi con R il punto di intersezione tra la retta passante per A e parallela all'asse delle ordinate e la retta tangente in O a K. Si scriva l'equazione cartesiana del luogo Λ descritto da R al variare di K nel fascio Φ. Si riconosca Λ.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino e i piani

$$\alpha: x + hy + z = 0, \quad \beta: x - y + z = 2h, \quad \gamma: hx + y + (1-h)z = -h,$$

ove h è un parametro reale.
i) Al variare del parametro h si stabilisca la posizione reciproca dei piani α, β e γ.
Posto $h = 1$
ii) dopo avere verificato che i piani α e γ sono incidenti in una retta s, si stabilisca la posizione reciproca tra s e la retta r perpendicolare in A(1, -1, 0) al piano α;
iii) si scrivano le equazioni della retta t passante per B(1, 0, 0) ed incidente sia a r sia a s;
iv) si individuino le sfere aventi centro sulla retta s, raggio $\sqrt{3}$ e tangenti al piano β.

Algebra lineare – Geometria 1

12 luglio 2005

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{Mat_2(R)}$ si considerino

le matrici $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

i sottoinsiemi $U = \{X \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid AX = XA\}$ e $W = \{Y \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid BY = 0\}$

l'omomorfismo f: $\mathbf{Mat_2(R)} \to \mathbf{Mat_2(R)}$ tale che $f\left(\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} t & t \\ 2x+y+z & 2x+y+z \end{vmatrix}$.

i) Si verifichi che U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{Mat_2(R)}$ e per ciascuno di essi si determini una base e la dimensione.
ii) Si verifichi se W è complemento diretto per U.
iii) Si scriva la matrice dell'omomorfismo f rispetto alla base canonica di $\mathbf{Mat_2(R)}$; si determinino le dimensioni di Imf e di ker$f$.
iv) Si costruiscano i sottospazi $f(U)$, $f(W)$, $f(U) \cap f(W)$ e $f(U) + f(W)$.

2) Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che, se $B = (e_1, e_2, e_3)$ è la base canonica, si abbia:

$$f(e_1 + e_2) = (1 + h, 0, 1 + h),\ \ f(e_1 - e_2) = (1 - h, 2, h - 1),\ \ f(e_1 - e_3) = (0, 0, 2h - 1),$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
i) Si scriva come agisce l'endomorfismo f sul generico vettore $v = (x, y, z)$ di $\mathbf{R}^3$ e si costruisca la matrice di f rispetto alla base canonica.
ii) Al variare del parametro h, si costruiscano i sottospazi Imf e Ker$f$ e se ne determinino le rispettive basi e dimensioni.
iii) Si stabilisca per quali valori di h il vettore $v = (0, 2h, -h)$ appartiene a Imf ; per tali valori si determini l'insieme P delle preimmagini di v. Si stabilisca se P è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$; in caso di risposta negativa si costruisca il sottospazio vettoriale generato da P.