Algebra lineare – Geometria 1

12 luglio 2006

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{Mat_2(R)}$ si considerino

le matrici H = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e K = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

il sottoinsieme $W = \{A \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid HAK = \underline{0}\}$,

il sottospazio $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2-h \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & 1 \\ 0 & h-1 \end{pmatrix} \right\rangle$, dove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.

i) Si verifichi che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{Mat_2(R)}$ e se ne determini una base e la dimensione.
ii) Detto S il sottospazio delle matrici simmetriche di $\mathbf{Mat_2(R)}$, si costruisca lo spazio vettoriale $W \cap S$ e se ne determini una base e la dimensione.
iii) Indicato con V il sottospazio delle matrici antisimmetriche di $\mathbf{Mat_2(R)}$, si verifichi se V è complemento diretto per W.
iv) Si stabilisca per quali valori del parametro reale h il sottospazio U è contenuto in W.

2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R^3}$ si consideri l'endomorfismo $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ tale che

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R^3} \quad f(x, y, z) = (2x + y + hz,\ y + (h-1)z,\ hz)$$

dove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Al variare di h
i) si costruiscano i sottospazi $\mathrm{Im}f$ e $\mathrm{Ker}f$;
ii) si costruisca il sottospazio vettoriale somma degli autospazi associati agli autovalori dell'endomorfismo f.
Si stabilisca per quali valori del parametro reale h
iii) l'endomorfismo f è diagonalizzabile; per tali valori di h si diagonalizzi f;
iv) il vettore $v = (h^2-2, -h, 2-h)$ è un autovetture; per tali valori si determini l'autovalore associato a v.

Geometria – Geometria 2

12 luglio 2006

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si consideri il fascio di coniche

$$\Phi: x^2 + (2k+1)xy - (3+k)y^2 + (1-k)y - 4x + 4 = 0.$$

i) Si riconoscano le coniche generatrici del fascio Φ, si stabilisca la natura del fascio, se ne determinino i punti base e le coniche degeneri.
ii) Si stabilisca, giustificando la riposta, se nel fascio Φ vi sono circonferenze o parabole non degeneri.
iii) Si individui l'iperbole equilatera Σ del fascio; si determinino le equazioni degli asintoti di Σ.
iv) Si determini l'equazione della conica Γ di Φ rispetto alla quale la polare di P(-2; 1) è tangente alla conica stessa. Si riconosca Γ.
v) Si individui l'equazione dell'iperbole K del fascio che ha un asintoto parallelo alla retta
r: $x - 5y = 0$; si determini la direzione dell'altro asintoto di K.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

i piani α: $x + y - z = 0$, β: $x - y + 1 = 0$, γ : $x - y + 2 = 0$, δ : $2x - z = 0$

e la retta r: $2x - y = x + z = 2$.

i) Si stabilisca la natura dei fasci di piani Φ_1, generato da α e β, e Φ_2, generato da γ e δ.
ii) Si scriva l'equazione del piano π del fascio Φ_1 parallelo alla retta r.
iii) Si stabilisca se nel fascio Φ_1 esiste un piano perpendicolare alla retta r.
iv) Si stabilisca se esiste un piano comune ai fasci Φ_1 e Φ_2. In caso di risposta negativa, si determini la minima distanza tra le rette sostegno, rispettivamente, dei fasci Φ_1 e Φ_2.