Algebra lineare – Geometria 1

12 dicembre 2006

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si considerino

il sottospazio $U = \langle(1, 0, 2), (-2, 1, 0), (0, 1, 4)\rangle$

il sottoinsieme $W = \{(x, y, z)\in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0 \wedge x - z = 0 \wedge 3x - y - z = 0\}$

la funzione f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\forall(x, y, z)\in \mathbf{R}^3$ $f(x, y, z) = (2x - y - z, -2z, -2z)$.

i) Dopo avere verificato che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$, se ne determini una base e la dimensione.
ii) Si stabilisca se U è complemento diretto per W.
iii) Dopo avere mostrato che f è un endomorfismo di $\mathbf{R}^3$, si costruiscano i sottospazi Imf e Ker$f$.
iv) Si verifichi se il sottospazio $f(U)$ è complemento diretto per il sottospazio $f(W)$.
v) Si stabilisca se l'endomorfismo f è diagonalizzabile; in caso di risposta affermativa, si diagonalizzi f.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} x + 2y + (h+1)z = h-1 \\ hx + 4y + 2(h+1)z = 2(h-1) \\ hx - y + z = 1 \end{cases}$$

ove $h\in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni

Geometria – Geometria 2

12 dicembre 2006

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sono assegnate la conica Γ: $x^2 - y^2 + 9 = 0$ e la retta r: $x - 4 = 0$.
Dopo avere riconosciuto la conica Γ, si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti a Γ nei punti in cui essa è intersecata dalla retta r.
i) Si scrivano le equazioni delle coniche degeneri di Φ e quelle delle eventuali parabole non degeneri.
ii) Si determini la conica Σ del fascio Φ rispetto alla quale i punti A(1; 1) e B(2; −1) sono coniugati. Si riconosca Σ e se ne determini il centro.
iii) Si individui l'iperbole Ω di Φ avente un asintoto parallelo alla retta a: $\sqrt{2}x - y + 8 = 0$; si determinino le equazioni degli asintoti di tale iperbole.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

il punto P(1; 2; −1)

i piani π: $x + y + z = 1$ e σ: $2x - y + z = 0$.

i) Si scrivano le equazioni della retta r passante per P e parallela ai piani π e σ.
ii) Si verifichi che i piani π e σ sono incidenti; detta t la retta individuata da π e σ, si determini la distanza di A da t.
iii) Si scriva l'equazione della sfera Σ avente centro in A e tangente a π. Si stabilisca la posizione di σ rispetto a Σ; nel caso che σ sia secante Σ, si determinino centro e raggio della circonferenza sezione.
iv) Detto H il piede della perpendicolare a π condotta da A, si scrivano le equazioni della retta s passante per H e perpendicolare a σ. Si determini la posizione reciproca tra le rette r e s.