Algebra lineare - Geometria 1

12 dicembre 2007

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ si consideri la funzione

$$f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$$

tale che $\quad f(A) = A + kA^T \quad$, ove k è un parametro reale.

1. Si verifichi che f è un endomorfismo per ogni valore di k.
2. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.
3. Si determinino i valori di k per i quali f è un automorfismo e per i rimanenti valori di k si determinino nucleo ed immagine per f.
4. Si determinino i valori di k per i quali f è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare reale

$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ 2x + y + kz = h \\ 7x + (2+3k)y + (3+2k)z = 2 \end{cases}$$

con h e k parametri reali.

1. Si discuta, al variare di h e k, la risolubilità del sistema.

Fissati d'ora in poi $h = -1/2$ e $k = 1$,

2. si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema;
3. si stabilisca se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e si determini in ogni caso $U :=< S >$ (chiusura di S) e una sua base;
4. si determini un complemento diretto per U;
5. se W è il sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema dato, si determinino una base e la dimensione di W e si dica se W è complemento diretto per U.

Geometria - Geometria 2

12 dicembre 2007

Esercizio 3. Nel piano affine euclideo reale in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si consideri il fascio Φ di coniche che passano per i punti $O = (0, 0)$, $A = (-1, 0)$, e sono tangenti in $B = (-1, -1)$ alla retta di equazione $x + y + 2 = 0$.

1. Individuare tutte le coniche degeneri del fascio Φ e scrivere l'equazione cartesiana di Φ. Stabilire poi se in Φ vi siano iperboli, parabole, ellissi.
2. Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera di Φ e determinarne il centro e gli asintoti.
3. Ci sono circonferenze non degeneri in Φ? In caso di risposta affermativa, determinarne centro e raggio.
4. Determinare e riconoscere le coniche del fascio Φ rispetto alle quali le polari del punto $P = (0, 1)$ e del punto improprio della retta $x + y = 0$ siano fra loro perpendicolari.
5. Si consideri la polare p del punto $P = (-2, 0)$ rispetto alla generica conica di Φ e sia R il punto d'intersezione diverso da B di p con tale conica. Si scriva l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ descritto dal punto R al variare della conica in Φ.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo reale in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, siano dati i piani

$$\alpha : y - 1 = 0, \quad \beta : x + 2 = 0, \quad \gamma : x - y = h,$$

con h parametro reale, la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

e il punto $P = (1, 1, 1)$.

1. Determinare, al variare di h, le posizioni reciproche dei piani α, β e γ.
2. Dopo aver verificato che la retta $s := \alpha \cap \beta$ è sghemba con r, si determini la minima distanza fra tali rette.
3. Calcolare le distanze del punto P dai piani α e β e dalla retta s.
4. Determinare e riconoscere il luogo descritto dai centri delle sfere di raggio unitario passanti per P ed ivi tangenti alla retta r.