Algebra lineare – Geometria 1

13 settembre 2005

1) Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}_2[x]$ e

I vettori , $u(x) = x^2 + x + 1$, , $v(x) = 2x^2 + x$, $z(x) = -x^2 + 1$

il sottospazio $W = < u(x), v(x), z(x) >$ di $\mathbf{R}_2[x]$,

il sottoinsieme $U = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(2) = p(-2)\}$,

l'omomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_2[x]$ tale che $f(B) = (u(x), v(x), z(x))$, essendo B la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

i) Dopo avere verificato che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$, se ne determinino una base a la dimensione.
ii) Si determinino una base e la dimensione del sottospazio W.
iii) Si costruiscano gli spazi vettoriali $U \cap W$ e $U + W$ e per ciascuno di essi si determinino una base e la dimensione.
iv) Si scriva la matrice dell'omomorfismo f rispetto alla base B e alla base canonica di $\mathbf{R}_2[x]$.
iv) Si costruisca il sottospazio Ker f.
v) Si determini un sottoinsieme A di $\mathbf{R}^3$ tale che f (A) = U e si verifichi se A è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} x + y - z = h + 1 \\ hx - y + z = h \\ 2x - hz = 2 \end{cases}$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.
Posto $h = 0$, dopo avere constato che il sistema è risolubile, si verifichi se l'insieme S delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. In caso di risposta negativa, si costruisca la chiusura di S.

Geometria – Geometria 2

13 settembre 2005

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si consideri la retta a: $x + y + 1 = 0$.
i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche che ammettono come asintoto la retta a e sono tangenti nell'origine O all'asse x del riferimento.
ii) Si individui l'equazione della conica K del fascio Φ avente centro in C(0, -1); dopo avere verificato che K è un'iperbole equilatera, si determinino gli asintoti di K.
iii) Si individui l'iperbole Σ del fascio Φ che ha un asintoto parallelo alla retta r: $x + 2y = 0$. Si scriva l'equazione di tale asintoto.
iv) Si determini la conica Γ del fascio Φ rispetto alla quale il punto P(2, -4) è il polo della retta
p: $5y - 4 = 0$.
v) Si determini per quali valori del parametro non omogeneo dell'equazione del fascio Φ si ottengono le iperboli non degeneri di Φ che hanno almeno un asintoto con coefficiente angolare positivo.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

il punto P(2, -1, -3)

e i piani α: $x - 3y + 2z - 5 = 0$ e β: $-2x + y + 3z + 4 = 0$.

i) Si scrivano le equazioni della retta r passante per P e parallela ai piani α e β.
ii) Dopo avere verificato che i piani α e β sono tra loro incidenti in una retta s, si stabilisca la posizione reciproca tra le rette r e s.
ii) Si determini la distanza del punto P dalla retta s.
iii) Si scriva l'equazione della sfera Σ avente centro in P e tangente al piano β.
iv) Dopo avere verificato che il piano α è secante la sfera Σ, si determinino il centro e il raggio della circonferenza intersezione.