Algebra lineare – Geometria 1

13 settembre 2006

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$A = \{(x_1, 1-x_1, 0, 2x_1) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 \in \mathbf{R}\}$$

e la funzione tra spazi vettoriali f: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{Mat_2(R)}$ tale che $\forall\, \boldsymbol{x} = (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} b+c & a-c-d \\ a-c & b+c+2d \end{pmatrix}.$$

i) Dopo avere verificato che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$, si determinino una base e la dimensione di U.
ii) Dopo avere constatato che l'insieme A non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$, si costruisca lo spazio vettoriale $W := \langle A \rangle$ e si determini una base e la dimensione di W.
iii) Si costruiscano i sottospazi vettoriali $U \cap W$ e $U + W$; per ciascuno di essi si mostri una base e si stabilisca la dimensione.
iv) Dopo avere verificato che f è un omomorfismo, si individuino i sottospazi Imf e Ker$f$.
v) Si costruiscano i sottospazi $f(U \cap W)$ e $f(U) \cap f(W)$.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} x + hy + (h-1)z & = h \\ x + (h-1)y - z & = h + 1 \\ (h-1)x + y - (h-1)z & = -1 \end{cases}$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.

Geometria – Geometria 2

13 settembre 2006

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si considerino la retta t: $x - y = 0$ e i punti O(0; 0), A(0; -1) e B(2; 0).
i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti alla retta t e passanti per i punti O, A, B.
ii) Nel fascio Φ si individui l'iperbole Γ avente un asintoto perpendicolare alla retta t; si scrivano le equazioni degli asintoti di Γ.
iii) Si determini l'equazione della conica Σ del fascio che ha centro nel punto H(1; -1/2); si riconosca Σ. Considerato poi il punto D(-5; -2), si trovino le coordinate dei punti di contatto delle tangenti condotte a Σ da tale punto.
iv) Nel piano proiettivo reale ampliamento del piano affine euclideo assegnato, si individuino le coniche non degeneri di Φ che sono tangenti alla retta impropria; per ognuna di tali coniche si determini il punto di tangenza con la retta impropria.
v) Si indichi con R l'ulteriore punto di intersezione della retta parallela all'asse x condotta per A con la generica conica K del fascio Φ. Siano poi r la retta tangente in A alla conica K, p la retta parallela all'asse y passante per R, P il punto di intersezione tra r e p. Si scriva l'equazione cartesiana del luogo Λ descritto dal punto P al variare della conica K nel fascio Φ. Si riconosca Λ.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

il piano α: $x + y - z + 2 = 0$

e i punti A(-1; 0; 0) e B(0; 2; 3).

i) Si stabilisca la posizione reciproca tra il piano α e la retta r individuata dai punti A e B.
ii) Detti Φ_1 il fascio proprio di piani di sostegno r e Φ_2 il fascio improprio di piano di sostegno α, si determini l'equazione del piano, se esiste, comune a Φ_1 e Φ_2.
iii) Si individui il piano β del fascio Φ_1 perpendicolare al piano α.
iv) Indicata con t la retta di intersezione tra i piani α e β, si verifichi che le rette t e r sono tra loro parallele e se ne determini la distanza.
v) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo Ω dei punti P del piano α tali che AB = 2BP. Dopo avere constatato che tale luogo è una circonferenza, si determinino il centro e il raggio di Ω.