Algebra lineare – Geometria 1

14 giugno 2005

1) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$ si considerino

il sottospazio $U = \langle (k, 1, 0), (1, k, 0), (0, k, k)\rangle$

e l'endomorfismo $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che, indicata con $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica, si abbia $f(e_1) = (1, 1, a)$, $f(e_1 + e_2) = (a + 1, 0, a + 1)$, $f(e_3 - e_1 - e_2) = (-a, 1, -2a)$,

ove k e a sono parametri reali.

i) Si determini al variare di k una base e la dimensione del sottospazio U.
ii) Si costruisca un complemento diretto per U.
iii) Si scriva come agisce l'endomorfismo f sul generico vettore $v = (x, y, z)$ di $\mathbf{R}^3$.
iv) Al variare del parametro a si costruiscano i sottospazi $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$; per ciascuno di essi si determini una base e la dimensione.
v) Posto $k = 1$, al variare di a si costruiscano i sottospazi $U \cap \operatorname{Ker} f$ e $U + \operatorname{Im} f$.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} x + hy + (h-1)z = -1 \\ x + (h-1)y - z = -2 \\ (h-1)x + y - (h-1)z = 2 \end{cases}$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.
Posto $h = 0$, dopo avere constato che il sistema è risolubile, si verifichi se l'insieme S delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. In caso di risposta negativa, si costruisca la chiusura di S.