Algebra lineare – Geometria 1

15 luglio 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}_3[x]$ si considerino l'insieme

$$A_k = \{1 + x, k + (1 - k)x^2, 1 + (k - 1)x^2 + x^3\},$$

il vettore $\mathbf{v}_k = k + kx - x^3$ e la funzione

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ a + bx + cx^2 + dx^3 & \longmapsto & (a + b, b + c, c + d), \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v}_k$ appartiene allo spazio vettoriale generato dall'insieme A_k;
2. determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, un complemento diretto per $< A_k >$.

Posto ora $k = 1$:

3. verificare che f è un omomorfismo e determinarne la matrice della rappresentazione scalare rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}_3[x]$ e di $\mathbb{R}^3$;
4. determinare nucleo e immagine di f;
5. determinare le preimmagini tramite f di $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$;
6. determinare la matrice della rappresentazione scalare di f rispetto alla base di $\mathbb{R}_3[x]$ ottenuta completando a base una base di $< A_1 >$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Si consideri, al variare del parametro reale k, la matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 & k & 0 \\ k+1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

1. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli autovalori della matrice A_k e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica; stabilire inoltre per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

Posto ora $k = -1$:

2. determinare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A_{-1};
3. determinare una matrice $B \neq A_{-1}$ simile alla matrice A_{-1}.

Geometria 2

15 luglio 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare b_k definita rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & k & k(k-2) \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare i valori di k per cui b_k è un prodotto scalare;
2. per ciascuno dei valori determinati al punto precedente determinare la dimensione per il radicale di b_k e, se esiste, una sua base;
3. posto $k = -1$ e indicato con $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$, determinare il complemento ortogonale di $< \mathbf{v} >$ rispetto a b_{-1}.

Esercizio 2. Nel piano euclideo reale in cui è fissato un riferimento cartesiano determinare un'equazione del fascio $\mathscr{F}$ di coniche tangenti alla retta $r: \; x + y - 1 = 0$ in $P = (1, 0)$ e alla retta $s: \; 2x + y = 0$ in $Q = (1, -2)$.

1. Determinare le eventuali coniche degeneri di $\mathscr{F}$ e classificarne le coniche generali;
2. determinare un'equazione della conica $\mathscr{C}$ di $\mathscr{F}$ che ha come asse la retta a : $x - y - 1 = 0$ e determinare delle equazioni cartesiane delle rette tangenti a $\mathscr{C}$ nei suoi vertici appartenenti all'asse a;
3. stabilire se la conica $\mathscr{C}$ determinata al punto precedente è tangente ad una iperbole equilatera nei punti in cui è intersecata dalla retta $x = 0$ e, in caso di risposta affermativa, determinare un'equazione cartesiana di tale iperbole.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, si considerino la retta $r: \; x - 1 = 0 = z$ e i punti $A = (1, 1, 2)$ e $B = (1, -1, 0)$.

1. Determinare una rappresentazione cartesiana della circonferenza $\mathscr{C}$ con centro sulla retta r e passante per A e B;
2. determinare un'equazione cartesiana del luogo $\mathscr{L}$ dei punti delle rette che proiettano $\mathscr{C}$ dal punto $P = (0, 1, 1)$.