

Geometria – Geometria 2

17 marzo 2005

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino il punto $C(1, 1)$, la retta $a: x - 1 = 0$ e la parabola $\Gamma: y = x^2 - x$.

i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di iperboli equilateri aventi C come centro e a come asintoto.

ii) Si individui l'iperbole Σ del fascio Φ tangente nell'origine del riferimento alla parabola Γ ; si determinino gli assi e i vertici di tale iperbole.

iii) Si determini il polo P della retta $r: x - y - 3 = 0$ rispetto all'iperbole Σ e si stabilisca se P è coniugato di $Q(-2, 2)$ rispetto a Σ .

iv) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo K descritto dai punti di contatto delle tangenti condotte dal punto $T(2, 0)$ alla generica conica del fascio Φ . Si riconosca K .

2) Nello spazio vettoriale \mathbf{R}^3 si consideri la funzione $\varphi: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ tale che, qualunque siano $v = (x, y, z)$ e $v' = (x', y', z')$ vettori di \mathbf{R}^3 , si abbia

$$\varphi(v, v') = (h+k)xx' + h^2xy' + hyx' + hyy' + hxz' + (k-1)x + h^3zx' + (h+k)zz' + (h-k)yz' + (h-k)zy',$$

ove h e k sono parametri reali.

Si stabilisca per quali valori dei parametri la funzione φ

i) è un forma bilineare;

ii) è un prodotto scalare;

iii) è un prodotto scalare definito positivo.

Per i valori dei parametri h e k per cui la funzione φ è un prodotto scalare

iv) si stabilisca se la base canonica è una base ortogonale; in caso di risposta negativa si renda ortogonale tale base;

v) si costruisca, se possibile, una base ortonormale contenente il vettore $(0, 1, 0)$.