Algebra lineare – Geometria 1

17 giugno 2009

Esercizio 1. In $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ si considerino la matrice $M_k = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e i sottoinsiemi

$$U_k = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid A + M_k A^t = \mathbf{0}\},$$
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha + \beta + \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

dove k è un parametro reale.

1. Mostrare che U_k e W sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$;
2. determinare una base e la dimensione di W e, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione di U_k;
3. determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione di $U_k + W$ e di $U_k \cap W$ e stabilire per quali valori di k la somma è diretta.

Posto ora $k = -1$:

4. determinare, se possibile, un endomorfismo f di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ tale che $\ker(f) = U_{-1}$ e $\mathrm{Im}(f) = W$;
5. determinare la matrice della rappresentazione scalare di f rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Si considerino, al variare del parametro reale h, le matrici

$$A_h = \begin{bmatrix} h-2 & 1-h & h-1 \\ 1 & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ h-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_h = \begin{bmatrix} h \\ h-2 \\ h-2 \\ h-1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_h X = B_h$, specificando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Posto ora $h = 1$:

2. determinare l'insieme S delle soluzioni ed esprimere la generica soluzione del sistema come somma di una soluzione particolare e di una soluzione del sistema lineare omogeneo associato;
3. stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinare in ogni caso una base e la dimensione per $< S >$;
4. determinare un complemento diretto di $< S >$ in $\mathbb{R}^3$.

Geometria 2

17 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare b_k definita rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & 2 & 3 \\ k-1 & 0 & 4k-4 & 5k-5 \\ 2 & 4k-4 & 0 & 2 \\ 3 & 5k-5 & 2 & k+4 \end{bmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare i valori di k per cui il vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 1, -1)$ risulta isotropo per b_k;

2. per ciascuno dei valori determinati al punto precedente determinare una base e la dimensione per il radicale di b_k;

3. per ciascuno dei valori di k determinati al punto 1. determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ortogonale rispetto a b_k.

Esercizio 2. Nel piano euclideo reale in cui è fissato un riferimento cartesiano determinare un'equazione della conica $\mathscr{C}$ passante per $O = (0, 0)$, avente come asintoto la retta $a: \ 2x - y - 2 = 0$, come centro $C = (1, 0)$, e in cui la polare del punto $P = (0, -1)$ sia la retta $p: \ x + y - 5 = 0$; riconoscere tale conica e studiarla (assi, eventuali altri asintoti, vertici).

Esercizio 3. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, si considerino le rette $r: \ x - 1 = 0 = z - y - 2$ ed $s: \ x - y = 1 = z - y$ e il punto $C = (-1, -1, 1)$.

1. Dopo aver verificato che r ed s sono sghembe, determinare un'equazione cartesiana dei piani paralleli che le contengono e la distanza tra tali rette;

2. determinare delle equazioni cartesiane dei piani perpendicolari a s che individuano sulla sfera Σ di centro C e raggio 4 delle circonferenze di raggio 2.