Algebra lineare – Geometria 1

18 marzo 2008

Esercizio 1. Si considerino il sottoinsieme $A = \{(1,0,1),(2,1,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e i sottoinsiemi

$$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0 \ \wedge \ y - z - t = 0\right\},$$
$$W = \left\{(\alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

di $\mathbb{R}^4$.

1. Verificare che U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ e determinarne la dimensione e una base;
2. determinare la dimensione e una base per $U + W$ e $U \cap W$ e stabilire se la somma è diretta;
3. posto $V =< A >$ determinare, se esiste, un omomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $W = \ker f$ e $V = \operatorname{Im} f$;
4. determinare la matrice della rappresentazione scalare di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.
5. Dimostrare che se $V = V_n(\mathbb{K})$ e $V' = V'_m(\mathbb{K})$ sono due spazi vettoriali di dimensione finita e $W \leqslant V$, $m \geqslant n - \dim W$, $U \leqslant V'$, $\dim U \leqslant n$, esistono sempre un omomorfismo $f : V \to V'$ tale che $\ker f = W$ e un omomorfismo $g : V \to V'$ tale che $\operatorname{Im} g = U$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare reale

$$\begin{cases} -y + 3kz + t = k + 1 \\ x + (k+2)y - z + t = 2 \\ kx - (k+3)y + (7k-3)z = 6 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

1. Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del sistema e, per i valori di k per cui il sistema è risolubile, determinare il numero delle soluzioni.

Posto ora $k = 0$ determinare:

2. l'insieme S delle soluzioni del sistema e stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
3. una base e la dimensione di $V =< S >$;
4. un complemento diretto per V in $\mathbb{R}^4$.