Algebra lineare – Geometria 1

18 giugno 2007

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{Mat_2(R)}$ si considerino

la funzione f: $\mathbf{Mat_2(R)} \rightarrow \mathbf{Mat_2(R)}$ tale che $\forall A \in \mathbf{Mat_2(R)}$ $f(A) = A - A^t$

e il sottospazio $W = < \begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-h & 0 \end{pmatrix} >$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.

i) Si verifichi che la funzione f è un endomorfismo e si costruiscano i sottospazi Imf e Ker$f$.
ii) Si costruiscano gli autospazi dell'endomorfismo f e si dica se f è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva, si diagonalizzi l'endomforfismo.
iii) Al variare del parametro si un complemento diretto del sottospazio W.
iv) Si individuino gli eventuali autovettori appartenenti a W.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} (1+h)x + (1-h)y - t & = 1-h \\ 2hx - ht & = -h \\ (1+h)x + y + (1+h)z & = 1-h \end{cases}$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.

Geometria – Geometria 2

18 giugno 2007

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si consideri il fascio di coniche

$$\Phi\colon 2x^2 + (k-1)xy + (1+k)y^2 + 2ky + 2x = 0.$$

i) Si riconoscano le coniche generatrici del fascio Φ, si stabilisca la natura del fascio, se ne determinino i punti base e le coniche degeneri.
ii) Si stabilisca, giustificando la riposta, se nel fascio Φ vi sono circonferenze o parabole non degeneri.
iii) Si individui l'iperbole equilatera Σ del fascio; si determinino le equazioni degli asintoti di Σ.
iv) Si determini l'equazione della conica Γ di Φ che ha centro in C(-1/7; -5/7). Si riconosca Γ e si scriva l'equazione della retta tangente a Γ nel punto Q(0; -3/2).
v) Si individui l'equazione dell'iperbole K del fascio che ha un asintoto parallelo alla retta t: $2x + y = 0$; si determinino le equazioni degli asintoti di K. Si individui, poi, il polo rispetto a Γ della retta s: $3x - y + 2 = 0$.
vi) Si individuino le coniche non degeneri del fascio Φ che ammettono la retta d: $x + y = 0$ come diametro.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino le rette

a: $x = x + y = -1$

b: $z = y + z = -1$

c: $x = y = z$

e il punto P(1; 1; -1).

i) Dopo avere verificato che le rette b e c sono tra loro sghembe, si individui la retta n perpendicolare ed incidente ad entrambe le rette e si determini la minima distanza tra esse.
ii) Si calcoli la distanza del punto P dalla retta c.
iii) Dopo avere constatato che le rette a e b sono complanari, si scriva l'equazione del piano π individuato da tali rette.
iv) Si scriva l'equazione della sfera Σ di centro P e tangente al piano π.
v) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo descritto dalle rette incidenti alle rette a, b e c.