Algebra lineare – Geometria 1

18 giugno 2008

Esercizio 1. Si consideri la funzione:

$$f : \begin{cases} \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3[x] \\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \longmapsto (a + kbd - e) + (b + (k-1)d)x + (a + ke^2 + f)x^2 + (c - d)x^3 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare i valor di k per cui f è un omomorfismo, e per tali valori determinare una base e la dimensione di $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

Posto ora $k = 0$ e indicati con U e W i sottospazi di $\mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$

$$U =< \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} > \quad W =< \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} >$$

2. determinare la matrice della rappresentazione scalare di f rispetto alle basi canoniche;
3. stabilire se il polinomio $p(x) = 1 - x + 3x^3$ appartiene a $\mathrm{Im}(f)$;
4. determinare una base e la dimensione per $f(U)$ e $f(W)$;
5. determinare una base e la dimensione di $f(U) + f(W)$ e stabilire se la somma è diretta.

Esercizio 2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 2 \\ 2 & k+4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ h \\ -k+2 \end{bmatrix}$$

dove h e k sono parametri reali.

1. Si discuta al variare di h e k la risolubilità del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, specificando il numero di soluzioni.

Posto ora $k = -4$ e $h = 2$:

2. si determinino l'insieme S delle soluzioni del sistema e il sottospazio $W =< S >$;
3. si determini, se possibile, un sottospazio $U \leqslant R^3$ che sia complemento diretto di W;
4. si stabilisca giustificando la risposta se la matrice A è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, si scriva una matrice D diagonale simile ad A.

Geometria 2

18 giugno 2008

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino le rette

$$r : \begin{cases} 2x - 2y + z + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} x = k + 3 \\ x + z = k + 2 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare i valori di k per cui r ed s cono complanari e, per tali valori, un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

Posto ora $k = 0$, dopo aver verificato che r ed s sono sghembe,

2. determinare un'equazione cartesiana dei piani paralleli che le contengono;
3. determinare la distanza tra r ed s e un'equazione della retta di minima distanza;
4. determinare la circonferenza Γ tangente a r nel suo punto $R = (0, 1, 1)$ e passante per $A = (-8, 1, 1)$;

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si consideri la forma bilineare simmetrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + \frac{7}{2}x_1y_3 + \frac{7}{2}x_3y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_2.$$

1. Stabilire se f è un prodotto scalare euclideo e determinare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
2. determinare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a f.

Interpretando $[(x_1, x_2, x_3)]$ come coordiante proiettive omogenee in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ e indicata con q la forma quadratica associata ad f:

3. riconoscere la conica $\mathscr{C}$ di equazione $q(x_1, x_2, x_3) = 0$ e determinarne il centro, gli assi e gli asintoti;
4. determinare il fascio $\mathscr{F}$ di coniche tangenti a $\mathscr{C}$ in $P = [(0, 0, 1)]$ e $Q = [(-1, 5, 1)]$;
5. determinare le eventuali coniche degeneri di $\mathscr{F}$;
6. determinare l'iperbole equilatera del fascio $\mathscr{F}$ e le direzioni dei suoi assi;
7. determinare la conica Γ del fascio tale per cui il punto $A = [(0, 1, 0)]$ è polo della retta $a :\ 3x+y-1 = 0$, e determinare il polo della retta di equazione $4x-y+1 = 0$ rispetto a tale conica Γ.