Geometria 2

5 aprile 2011

Es. 1. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathscr{C}$ di equazione

$$\mathscr{C} \ : \ x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4 = 0.$$

Dopo averne determinato la classificazione affine e proiettiva, si determinino le coordinate del centro, le equazioni degli asintoti e degli assi.
[Iperbole generale, centro: $(1; -1)$, asintoti: $y = x - 2, y = -x$, assi: $y = -1, x = 1$]

Siano dati inoltre i punti $A = (-2; 0)$ e $T(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$ e la retta $t \ : \ x + y + 3 = 0$.
Si determinino:

(a) un'equazione del fascio $\mathscr{F}$ di coniche passanti per il punto A, tangenti nel punto T alla retta t e aventi come asse la retta di equazione $y = x$;
[$(k + 3)(x^2 + y^2) + 2(k + 5)xy + (5k + 24)(x + y) + 6k + 36 = 0$]

(b) un'equazione dell'iperbole equlatera del fascio $\mathscr{F}$, le coordinate del suo centro e le equazioni degli asintoti;
[$4xy + 9x + 9y + 18 = 0$, centro: $(-\frac{9}{4}; -\frac{9}{4})$; asintoti: $x = -\frac{9}{4}, y = -\frac{9}{4}$]

(c) un'equazione dell'ellisse di $\mathscr{F}$ il cui ulteriore asse ha equazione $x + y + \frac{3}{2} = 0$ e le coordinate dei suoi vertici. [$3x^2 + 3y^2 + 2xy + 6x + 6y = 0$, vertici: $T, O = (0; 0), V_1 = \left(\frac{-3+3\sqrt{2}}{4}; \frac{-3-3\sqrt{2}}{4}\right), V_2 = \left(\frac{-3-3\sqrt{2}}{4}; \frac{-3+3\sqrt{2}}{4}\right)$]

Es. 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, sia $\vec{u}$ il vettore di componenti $\vec{u} = (1; 1; 2)$. Si determinino una base e la dimensione del sottospazio ortogonale ad $\vec{u}$. Si verifichi che si tratta di un piano e se ne scriva un'equazione cartesiana. [$\dim \vec{u}^{\perp} = 2$, base: $((1; -1; 0), (0; -2; 1))$, $x + y + 2z = 0$]

Date le rette r ed s di equazioni

$$r \ : \ \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} , \qquad s \ : \ \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = t - 1 \end{cases} ,$$

si determinino:

(a) le equazioni cartesiane della retta perpendicolare e incidente s e passante per $A = (1; 2; 3)$; [$x = 1 = z - y$]

(b) detto α il piano precedentemente determinato, le posizioni reciproche tra r ed s, tra α ed r, tra α ed s; [r ed s ortogonali e incidenti in $(1; 0; 1)$; r ed α incidenti nell'origine; s ed α paralleli]

(c) un'equazione cartesiana per il piano comune ai due fasci di sostegno r ed s; [$x - 2y - z = 0$]

(d) le coordinate di una coppia (R, S) di punti tali che $R \in r$, $S \in s$ e che abbiano distanza pari a $\sqrt{2}$. [$(1; 0; 1), (0; 0; 0)$]