Geometria 2

5 luglio 2011

Esercizio 1. Dato in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ fascio $\mathscr{F}_k$ di coniche di equazione

$$(k-1)x^2 + 2(k+1)xy + (k-1)y^2 + 2x - 2y = 0,$$

(a) studiare tale fascio, determinando i punti base e classificando le coniche dal punto di vista affine e proiettivo. [Fascio di coniche bitangenti, con punti base $(0;0)$ e $(1;-1)$, entrambi di molteplicità 2. La conica degenere che si ottiene per $k=0$ ha equazione $(x-y)(x-y-2)=0$; l'altra, non espressa in $\mathscr{F}_k$, ha equazione $(x+y)^2=0$. Se $k<0$ si hanno ellissi generali, se $k>0$ iperboli generali]

(b) detta $\mathscr{C}$ la conica di $\mathscr{F}_k$ passante per il punto P di coordinate $P=\left(\frac{2}{3};0\right)$, determinarne le coordinate del centro, le equazioni degli asintoti e degli assi;
[$\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; assi: $x+y=0$, $x-y-1=0$; asintoti: $3x+(1\pm 2i\sqrt{2})y \pm i\sqrt{2}-1=0$]

(c) determinare un'equazione della tangente a $\mathscr{C}$ nel punto P.
[$3x+5y-2=0$]

Esercizio 2. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, date le rette r di equazione $r : x-2y+3=0$ e t di equazione $t : y-2=0$,

(a) scrivere l'equazione della parabola generale avente come asse la retta r e tangente nel punto $A=(-3;2)$ alla retta t.
[$x^2-4xy+4y^2-8y+14x+9=0$]

(b) Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette r e t.
[$x-(2+\sqrt{5})y+3+2\sqrt{5}=0, \quad x-(2-\sqrt{5})y+3-2\sqrt{5}=0$]

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, sono date le rette r_h ed s_h di equazioni:

$$r_h : \begin{cases} x-1=0 \\ 2y+hz-h-2=0 \end{cases} \qquad s_h : \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ z-h=0 \end{cases},$$

dove h è un parametro reale.

(a) Studiare le posizioni reciproche di tali rette al variare del parametro.
[Incidenti se $h=0$ o $h=1$; sghembe altrimenti]

(b) Nei casi in cui le rette siano incidenti, determinare le coordinate dei punti di intersezione e le equazioni dei piani che le contengono.
[Se $h=0$: $(1;1;0)$, $3x+y-4=0$; se $h=1$: $(1;1;1)$, $6x+2y+z-9=0$]

(c) Posto $h = 1$, scrivere:

(c.1) le equazioni cartesiane della retta t passante per il punto X di intersezione tra r_1 ed s_1 e ortogonale al piano π in cui esse sono contenute;
$[x - 6z + 5 = 0 = y - 2z + 1]$

(c.2) le coordinate dei punti appartenenti a t che distano $\sqrt{41}$ da π;
$[(7; 3; 2), (-5; -1; 0)]$

(c.3) la distanza tra l'origine e la retta r_1 e la distanza tra l'origine e il piano π.
$\left[d(O, r_1) = \sqrt{\frac{14}{5}}, \quad d(O, \pi) = \frac{9}{\sqrt{41}}\right]$