Geometria 2

7 dicembre 2010

Es. 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, sono date le rette r ed s di equazioni:

$$r \ : \ \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \qquad s \ : \ \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y = -kz \end{cases} ,$$

dove k è un parametro reale.

Si determinino:

(a) i valori di k per i quali le rette r ed s risultano complanari e un'equazione cartesiana del piano che le contiene; [$k = -2$, $y - 2z = 0$]

(b) per i valori determinati al punto precedente, la posizione reciproca delle due rette. [Incidenti in $(1; 2; 1)$]

Posto $k = 0$, si determinino:

(c) un sistema di equazioni cartesiane della retta di minima distanza tra r ed s; [$x + 2y - 3 = 0 \cap 5z - 3 = 0$]

(d) un'equazione per la sfera di raggio minimo tangente ad r ed s; [$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{18}{5}x - \frac{6}{5}y - \frac{6}{5}z + \frac{54}{25} = 0$]

(e) un'equazione cartesiana del piano parallelo alle rette date e passante per il centro della sfera. [$2x - y - 3 = 0$]

Es. 2. Data, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, la funzione $f_k \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, tale che per ogni $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, per ogni parametro reale k,

$$f_k((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \left(\frac{k-2}{2}\right)(x_1y_2 + x_2y_1) + (4 - 2k)(x_1y_3 + x_3y_1) - 4(x_2y_3 + x_3y_2),$$

(a) stabilire, al variare di k, se si tratta di una forma bilineare simmetrica; [E' simmetrica per ogni k]

(b) interpretando $[(x_1, x_2, x_3)]$ come coordinate proiettive omogenee in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, e indicata con q_k la forma quadratica associata ad f_k, studiare il fascio $\mathscr{F}_k$ di coniche di equazione $q_k(x_1, x_2, x_3) = 0$, determinandone i punti base e le coniche degeneri. [$(0; 0)$, $(0; 8)$, $(4; 4)$, $(-4; 4)$, $(x - y)(x - y + 8) = 0$, $x(y - 4) = 0$, $(x + y)(x + y - 8) = 0$]

Posto $k = -2$:

(c) determinare una base ortogonale per f_{-2} e scrivere la matrice di f_{-2} rispetto a tale base; [$((1; 0; 0), (2; 1; 0), (2; 5; 1))$]

(d) stabilire se f_{-2} è un prodotto scalare euclideo; [Non è un prodotto scalare euclideo, ma è indefinito]

(e) studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione $q_{-2}(x_1, x_2, x_3) = 0$, classificandola dal punto di vista affine e determinando le coordinate del centro e le equazioni degli asintoti e degli assi.
[Iperbole di centro $(0; 4)$, eq. assi: $x - y + 4 = 0$, $x + y - 4 = 0$, eq. asintoti: $x - (2 \pm \sqrt{3})y \pm 4\sqrt{3} + 8 = 0$]