Geometria 2

13 luglio 2010

Es. 1. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ sia $\varphi : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare tale che per ogni $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(X,Y) = k[x_1y_1+4x_2y_2+6x_3y_3+4x_4y_4+k^2x_1y_4+x_4y_1+2(k+1)x_2y_3+2(k+1)x_3y_2].$$

(a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare φ è un prodotto scalare. [$k = 0, \pm 1$]

(b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare φ è un prodotto scalare definito negativo. [$k = -1$]

(c) Posto $k = 1$, dire se la base canonica di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ è ortogonale. In caso di risposta negativa, ortogonalizzarla. [La b.c. non è ortogonale. $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$]

Es. 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ sono date le rette r ed s di equazioni

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ x + z + 4 = 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x + y + 2z - 7 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$

(a) Stabilire la posizione reciproca tra r ed s. [r ed s sghembe]

(b) Nel caso in cui le rette siano complanari, determinare un'equazione cartesiana del piano che le contiene, nel caso in cui siano sghembe, determinare le equazioni cartesiane della retta di minima distanza. [$x+12 = z-8 = 0$]

Es. 3. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, dati i punti $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$,

(a) scrivere un'equazione del fascio di coniche tangenti nei punti A e B alla circonferenza di centro C; [$x^2 + y^2 + (k+2)xy - 2x - 2y + 1 = 0$]

(b) determinare un'equazione della parabola non degenere del fascio e studiarla, indicando centro, asse, vertice e fuoco;
[$x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$, centro $[(1;1;0)]$, asse $y = x$, vertice $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, fuoco $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$]

(c) determinare un'equazione della curva simmetrica dell'iperbole degenere del fascio rispetto al punto C. [$xy - 2x - 2y + 4 = 0$]