Geometria 2

15 settembre 2010

Es. 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilinare tale che $\forall\, (x,y,z),\ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, $h \in \mathbb{R}$,

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = (h+2)xx' + (2-h^2)xy' + h(1+2h)x'y + 5yy' + 2yz' + 2zy' + zz'.$$

(a) Determinare i valori di h per cui la forma bilineare φ è simmetrica.
$[h = -1 \cup h = \frac{2}{3}]$

(b) Per i soli valori di h interi, determinati al punto precedente, dire se la forma bilineare è definita positiva, giustificando la risposta.
[Per $h = -1$ il prodotto scalare non è definito positivo]

(c) Per i soli valori di h interi determinati al punto (a), posti

$$U = <(1,0,0),(1,2,0)> \qquad \text{e} \qquad V = <(0,1,0),(1,0,2)>,$$

determinare i complementi ortogonali di tali sottospazi e verificare, in entrambi i casi, se ciascun sottospazio è in somma diretta con il proprio complemento ortogonale.
[$U^{\perp} = <(1,-1,2)>$ e si ha $U \oplus U^{\perp}$; $V^{\perp} = <(-5,1,0),(-2,0,1)>$ e la somma tra V e $V^{\perp}$ non è diretta]

Es. 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, date le rette r, s, t di equazioni

$$r : \begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}, \qquad t : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases},$$

determinare:

(a) le equazioni cartesiane dei piani paralleli ρ e σ su cui r ed s giacciono rispettivamente; $[\rho : x - y + z - 9 = 0, \quad \sigma : x - y + z - 3 = 0]$

(b) un'equazione cartesiana del piano passante per t e ortogonale a s; $[y + z = 0]$

(c) un'equazione della sfera con centro sulla retta t e passante per i punti di intersezione di t con i piani ρ e σ. $[x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 4z + 9 = 0]$

Es. 3. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, scrivere un'equazione del fascio di coniche tangenti nell'orgine del sistema di riferimento all'asse y e nel punto $A(1;-1)$ alla retta r di equazione $r : y = x - 2$. $[(k+1)x^2 + ky^2 + (2k-1)xy - 2x = 0,\ k \in \mathbb{R}\ \cup x^2 + 2xy + y^2 = 0]$
Successivamente:

(a) scrivere le equazioni delle parabole del fascio, specificandone la classificazione proiettiva;
[Parabola generale: $9x^2 + y^2 - 6xy - 16x = 0$, parabola degenere: $(x+y)^2 = 0$]

(b) determinare un'equazione della conica del fascio passante per il punto $P(\frac{4}{3};0)$ e le coordinate del suo centro;
[$3x^2 + y^2 - 4x = 0$, centro: $(\frac{2}{3},0)$]

(c) determinare il polo della retta di equazione $x + y = 0$, rispetto alla conica determinata al punto precedente.
$[(0;-2)]$