

Geometria 2

21 giugno 2011

Es. 1. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, date le rette:

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases} ,$$

determinare:

- (a) le equazioni cartesiane della retta di minima distanza tra r ed s ;
[$x = 0 = y - z$]
- (b) un'equazione della sfera Γ tangente le due rette e avente centro sulla retta determinata al punto precedente;
[$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0$]
- (c) le coordinate dei centri e le misure dei raggi della circonferenza massima di Γ e della circonferenza individuata da Γ e dal piano α di equazione $2y - 1 = 0$;
[$(0, 1, 1)$, $r = \sqrt{2}$; $(0, \frac{1}{2}, 1)$, $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$]
- (d) un'equazione della superficie che si ottiene per rotazione della retta s attorno alla retta a di equazioni

$$a : \begin{cases} x = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} .$$

$$[x^2 - y^2 - 7z^2 - 8yz + 24y + 48z - 80 = 0]$$

Es. 2. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, è data la conica \mathcal{C} di equazione

$$\mathcal{C} : x^2 + 3xy + y^2 + x + y = 0.$$

Dopo averla studiata, determinando le coordinate del centro e le equazioni degli assi, scrivere l'equazione della tangente a \mathcal{C} nell'origine del sistema di riferimento.

[Iperbole generale, centro: $(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$, assi: $x - y = 0$, $5x + 5y + 2 = 0$, tangente in O : $x + y = 0$]

Successivamente:

- (a) costruire il fascio \mathcal{F} di coniche tangenti alla retta $t : x + y = 0$ e passanti per i punti in cui \mathcal{C} interseca gli assi coordinati;
[$kxy + (x + y + 1)(x + y) = 0$]
- (b) studiare il fascio \mathcal{F} (determinare le equazioni delle coniche degeneri e classificare le coniche del fascio dal punto di vista affine e proiettivo, al variare del parametro);
[Coniche deg.: $xy = 0$, $(x + y + 1)(x + y) = 0$; $k < -4 \cup k > 0$ iperboli gen., $k = -4$ parabola gen., $k = 0$ parabola deg., $-4 < k < 0$ ellissi gen.]
- (c) determinare un'equazione della conica di \mathcal{F} avente il centro nel punto $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e riconoscere tale conica;
[Circonferenza di centro C e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x^2 + y^2 + x + y = 0$]
- (d) costruire il fascio \mathcal{F}' di iperboli equilatera aventi come asintoto la retta di equazione $x - 2y - 2 = 0$ e come diametro la retta t .
[$(6x + 3y - 2)(x - 2y - 2) + k = 0$]