Geometria 2

22 marzo 2011

Es. 1. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si considerino la conica δ di equazione $\delta\ :\ (2x+y)^2-x=0$ e la circonferenza γ centrata nell'orgine, di raggio 2. Si determinino:

(a) il tipo affine e proiettivo della conica δ; studiare poi δ determinandone centro, assi (o asse) ed eventuali asintoti; [parabola generale, centro $[(1;-2;0)]$, asse: $10x+5y-1=0$]

(b) un'equazione del fascio $\mathscr{F}$ i cui punti base sono dati dalle intersezioni tra γ e δ; $[4x^2+4xy+y^2-x+k(x^2+y^2-4)=0]$

(c) un'equazione dell'eventuale iperbole equilatera del fascio $\mathscr{F}$ e le equazioni dei suoi asintoti; $[3x^2-3y^2+8xy-2x+20=0;\ 75x+25y-13=0,\ 25x-75y+9=0]$

(d) un'equazione del luogo $\mathscr{L}$ dei punti simmetrici di $P=(0;4)$ rispetto al generico punto di γ e lo si riconosca; [$x^2+y^2+8y=0$, circonferenza: centro $(0;-4)$, raggio 4]

(e) un'equazione della polare del punto P rispetto a $\mathscr{L}$. $[y=-2]$

Es. 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, sono date le rette r_λ ed s_λ di equazioni:

$$r_\lambda\ :\ \begin{cases} x+(\lambda-1)y=2-\lambda \\ z=0 \end{cases},\qquad s_\lambda\ :\ \begin{cases} 5x-\lambda y=0 \\ (\lambda-2)x+z=2\lambda \end{cases},$$

dove λ è un parametro reale.

Si determinino:

(a) i valori di λ per cui le rette risultano complanari; [Incidenti per $\lambda=0$, $\lambda=-4\pm\sqrt{22}$, sghembe altrimenti]

(b) posto $\lambda=2$, le equazioni cartesiane della generica retta passante per il punto $P=(2;3;5)$, ortogonale a r_2 e incidente a s_2; $[x-y+1=0=3x-4z+14]$

(c) posto $\lambda=2$, determinare la minima distanza tra r_2 ed s_2. [4]

Es. 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, sia $\varphi\ :\ \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ l'applicazione tale che $\varphi(x;y)=x^TA_ky$ con $A_k=\begin{pmatrix}1 & 2 & k^2-k\\ 2 & k+5 & 1\\ 0 & 1 & 2(-1)^k\end{pmatrix}$, per ogni $k\in\mathbb{Z}$.

(a) Stabilire per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ l'applicazione φ è un prodotto scalare; $[k=0, k=1]$

(b) Stabilire per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ l'applicazione φ è un prodotto scalare definito positivo; $[k=0]$

(c) Posto $k = 1$, dire se la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è ortogonale. In caso di risposta negativa, ortogonalizzarla.
[La base canonica non è ortogonale; $\mathscr{B}' = ((1, 0, 0), (-2, 1, 0), (-2, 1, -2))$]