Geometria – Geometria 2

28 giugno 2006

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino i punti P(1; 0), Q(2; −1), T(0; −1).
i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti all'asse y e passanti per i punti P, Q, T.
ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se nel fascio Φ ci sono parabole non degeneri e circonferenze non degeneri.
iii) Dopo avere verificato che nel fascio Φ esiste un'iperbole equilatera non degenere Σ, se ne determini l'equazione; si scrivano le equazioni degli asintoti di Σ.
iv) Si individui la conica K di Φ che ammette la retta d: $x - 2y + 2 = 0$ come diametro; si riconosca K.
v) Si determini l'equazione dell'iperbole Λ di Φ che ammette un asintoto parallelo alla retta
r: $2x - y = 0$; si scrivano poi le equazioni degli asintoti di Λ .

2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si consideri la funzione φ: $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tale che, qualunque siano
$v = (x, y, z)$ e $v' = (x', y', z')$ vettori di $\mathbf{R}^3$, si abbia

$$\varphi(v, v') = (k-h)xx' + (k-1)x^2 + h^3xy' + hxz' + hyx' + (1+k-h)yy' + (k+h^2)yz' + hzx' + (h+k)zy' + zz'$$

ove h e k sono parametri reali.
Si stabilisca per quali valori di tali parametri la funzione φ
i) è un forma bilineare;
ii) è un prodotto scalare;
iii) è un prodotto scalare definito positivo.
Per i valori dei parametri h e k per cui la funzione φ è un prodotto scalare
iv) si stabilisca se la base canonica è una base ortogonale; in caso di risposta negativa si renda ortogonale tale base;
v) si costruisca il sottospazio $V^{\perp}$, essendo $V := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y = 0\}$.