Geometria 2

29 giugno 2010

Es. 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione tale che $\forall\ (x_1, x_2, x_3),\ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\ h, k \in \mathbb{R}$,

$$\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2(k+1)x_3y_3+$$

$$+\frac{k^2}{4}x_1y_2 + \frac{k+2}{4}x_2y_1 + \frac{2}{3}(k+1)x_2y_3 + \frac{2}{3}(k+1)x_3y_2 + h^2x_1y_2^2.$$

(a) Stabilire per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ la funzione φ è una forma bilineare. [$h = 0$]

(b) Stabilire per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ la funzione φ è un prodotto scalare. [(A) $h = 0, k = -1$; (B) $h = 0, k = 2$]

(c) Nei casi in cui φ è un prodotto scalare, determinare una base per $A^\perp$, dove $A =< (0, 0, 1) >$.
[(A) $\dim A^\perp = 3, A^\perp = \mathbb{R}^3$; (B) $\dim A^\perp = 2, A^\perp =< (1, 0, 0), (0, -3, 1) >$]

(d) Stabilire per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ la funzione φ è un prodotto scalare definito positivo. [(B)]

Es. 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, determinare:

(a) un'equazione per la sfera Σ di centro $C(0, 2, 1)$, passante per il punto $P(\sqrt{6}, 1, 4)$; [$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z - 11 = 0$]

(b) le equazioni cartesiane dei piani tangenti la sfera e paralleli al piano xz; [$y = -2, y = 6$]

(c) un'equazione del luogo dei centri delle circonferenze ottenute per intersezione della sfera Σ e del fascio proprio di piani di sostegno l'asse z. [$x^2 + y^2 - 2y = 0 = z - 1$]

Es. 3. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, dato il fascio di coniche

$$\mathscr{C}_k \ :\ x^2 + y^2 + (k-2)xy - (k+1)x + (1-2k)y + 2k = 0, \quad k \in \mathbb{R},$$

(a) determinare la natura del fascio, i punti base e le coniche degeneri;
[F. di coniche tangenti; $A(1, 1), B(2, 2), C(2, 1)$, C con molteplicità 2;
coniche degeneri: $(x - 2)(y - 1) = 0,\ (y - x)(y - x + 1) = 0$]

(b) stabilire se il fascio contiene circonferenze e, in tal caso, dire per quali valori di k; [$k = 2$]

(c) studiare la conica avente centro sull'asse x, determinando asintoti e assi; scrivere l'equazione della tangente a tale conica in $T(4; -1)$. [Iperbole; asintoti: $x + \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right) y - 3 = 0$; assi: $x \pm y - 3 = 0$;
tangente in T: $x - y - 5 = 0$]