Geometria 2

29 settembre 2010

Es. 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione tale che

$$\forall\ (x,y,z,t),\ (x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4, h,k \in \mathbb{R} \qquad \varphi((x,y,z,t),(x',y',z',t')) =$$

$$= 3xx'+2xy'+[h^2+2(h+1)]x'y+2yy'+x'z+xz'+(1-h^2)y'z+yz'+(k^2+4k+3)x'+zz'+tt'.$$

(a) Determinare i valori di h e k per cui φ è una forma bilineare. $[k=-1 \cup k=-3,\ \forall h \in \mathbb{R}]$

(b) Determinare i valori di h e k per cui φ è una forma bilineare simmetrica. $[(k=-1 \cup k=-3)\ \cap\ h=0]$

(c) Per i valori determinati nel punto precendente, dire se la base canonica di $\mathbb{R}^4$ è ortogonale. In caso di risposta negativa, ortogonalizzarla. [La base canonica non è ortogonale. $\mathscr{B} = ((0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,-1,0),(1,-1,0,0))$]

Es. 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, data la sfera Σ di equazione

$$\Sigma\ :\ x^2+y^2+z^2-4y-8z+16=0,$$

determinare:

(a) le coordinate del centro e il raggio della sfera; [Centro: $(0;2;4)$, raggio: 2]

(b) le equazioni cartesiane dei piani passanti per la retta

$$r\ :\ \begin{cases} x+y+4=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$$

e tangenti la sfera; $[(3\pm 2\sqrt{2})x+(8\pm 6\sqrt{2})y+2=0$ equivalentemente $\sqrt{2}x \pm 4y + 6\sqrt{2} \mp 8 = 0]$

(c) le equazioni cartesiane dei piani paralleli al piano xy, che individuano su Σ circonferenze di raggio $\sqrt{3}$. $[z=3, z=5]$

Es. 3. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, scrivere un'equazione del fascio di coniche aventi centro nell'origine del sistema di riferimento e passanti per i punti $A(-4;0)$ e $B(0;2)$. $[x^2+4y^2+(k+4)xy-16=0]$ Successivamente:

(a) Determinare le equazioni delle coniche degeneri di tale fascio. $[(x+2y-4)(x+2y+4)=0, \quad xy=0, \quad (x-2y+4)(x-2y-4)=0]$

(b) Determinare un'equazione della conica del fascio tale che la polare del punto $P(8;-4)$ sia la retta di equazione $x-2y-2=0$, riconoscerla e studiarla, scrivendo le equazioni degli asintoti e degli assi.
[Ellisse (generale): $x^2+4y^2-16=0$, asintoti: $ix \pm 2y = 0$, assi: $x=0, y=0$]