Algebra lineare – Geometria 1

20 marzo 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottoinsiemi:

$$U =< (k, 0, k, 0), (1, 1, 0, 0), (0, k, -1, 0) >,$$
$$W = \{(2\alpha + \gamma, \alpha, \alpha, \beta - \gamma) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\},$$

dove k è un parametro reale. Dopo aver verificato che U e W sono sottospazi vettoriali, al variare di k, determinare:

1. la dimensione e una base di U e di W;
2. la dimensione e una base di $U + W$ e di $U \cap W$;
3. la base $\mathscr{B}'$ di un complemento diretto di U.
4. Posto ora $k = 2$, determinare le componenti di $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)$ rispetto a $\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}'$, dove si è indicata con $\mathscr{B}_U$ la base del sottospazio U determinata nel punto 1.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ è fissata una base $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e sia $f_k : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'endomorfismo tale che

$$f_k(\mathbf{e}_1) = 2k\mathbf{e}_1 + (k-1)\mathbf{e}_2$$
$$f_k(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{e}_1 + (k-1)\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$
$$f_k(\mathbf{e}_3) = k\mathbf{e}_1 + (k-1)\mathbf{e}_3,$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui f_k è invertibile;
2. posto $k = 2$ determinare la matrice della rappresentazione scalare di f_2^{-1} rispetto alla base $\mathscr{B}$;
3. posto $k = -2$ determinare le preimmagini di $\mathbf{v} = -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3$ tramite f_{-2};
4. al variare di $k \in \mathbb{R}$ e posto $\mathscr{B} = (1, -1 + 2x^2, -1 - 2x + x^2)$ determinare l'azione di f_k sul generico polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

Geometria 2

20 marzo 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica b_k definita, per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, da:

$$b_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2(k-1)x_3y_3,$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare la matrice che rappresenta b_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e i valori di k per cui b_k è degenere;
2. posto $k = 0$ determinare, se possibile, una base del radicale di b_0 e una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a b_0.

Indicata ora con q_k la forma quadratica associata a b_k, interpretando $[(x_1, x_2, x_3)]$ come coordinate omogenee nello spazio proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$:

3. determinare, al variare del parametro k, la natura delle coniche del fascio di equazione $q_k(x_1, x_2, x_3) = 0$;
4. determinare un'equazione della conica $\mathscr{C}$ del fascio passante per $P = [(1, 0, 2)]$ e studiarla (centro, assi, eventuali asintoti, vertici);
5. determinare un'equazione cartesiana della retta tangente a $\mathscr{C}$ nel punto P.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ riferito a coordinate cartesiane ortogonali si considerino le rette $r : x - 1 = 0 = y + z - 2$ ed $s : 2x + y = 0 = x + 2z - 1$.

1. Dopo aver verificato che le due rette r ed s sono tra loro sghembe determinare delle equazioni cartesiane dei piani paralleli che le contengono e la distanza tra tali rette;
2. determinare le coordinate dei punti R ed S di r ed s rispettivamente per cui passa la retta di minima distanza.