Algebra lineare – Geometria 1

21 marzo 2005

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{Mat_2(R)}$ si considerino

la matrice $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, il sottoinsieme $U = \{A \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid A + HA = 0\}$,

il sottospazio $W = \{A = [a_{ij}] \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid 2a_{11} - a_{12} = 0\}$

e la funzione f: $\mathbf{Mat_2(R)} \to \mathbf{Mat_2(R)}$ tale che $\forall X \in \mathbf{Mat_2(R)}$ $f(X) = HX$

i) Dopo avere verificato che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{Mat_2(R)}$, se ne determini una base e la dimensione. Si determinino, inoltre, una base e la dimensione per il sottospazio W.
ii) Si costruiscano i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$.
iii) Detto S il sottospazio delle matrici simmetriche di $\mathbf{Mat_2(R)}$, si costruiscano i sottospazi $U \cap S$ e $W \cap S$; di ciascuno di tali sottospazi si determinino una base e la dimensione.
iv) Dopo avere mostrato che la funzione f è un automorfismo, si consideri il sottoinsieme $V = \{X \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid f(X) = X\}$ e si verifichi che V è un sottospazio di $\mathbf{Mat_2(R)}$.
v) Si verifichi se U e V sono in somma diretta.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} x + hy + (h-1)z = 1 \\ 2x + 2(h-1)y - 2z = 2 - h \\ (h-1)x + y - (h-1)z = 0 \end{cases}$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.
Posto $h = 1$, dopo avere constato che il sistema è risolubile, si verifichi se l'insieme U delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. In caso di risposta negativa, si costruisca la chiusura di U.