Algebra lineare – Geometria 1

22 dicembre 2009

Esercizio 1. Sia A una matrice fissata nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Dati i sottoinsiemi

$$H_n = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid AX = 2XA\} \text{ e } K_n = \{Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid AY - YA = 0\}.$$

Si dimostri che H_n e K_n sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Supposto ora $n = 3$ e

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si determinino le dimensioni di H_3 e K_3 , e si verifichi che $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) = H_3 \oplus K_3$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + hz = h + 2 \\ 2y = h - 1 \\ x + z = 2 \end{cases},$$

con h parametro reale.

1. Discutere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema , specificando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

2. considerando l'andomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ a cui è associata, rispetto alla base canonica, la matrice dei coefficienti delle incognite del sistema dato, si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il nucleo e l'immagine di T, e una base per ciascuno di essi.

3. Si discuta inoltre, al variare di h, la diagonalizzabilità dell'endomorfismo T.

Geometria 2

22 dicembre 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica f così definita

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

1. Si scriva la matrice di f rispetto alla base $B = ((1, 0, 0), (0, 0, 2), (0, -1, 0))$;
2. si determini una base di $\mathbb{R}^3$, ortogonale rispetto ad f;
3. si determini la dimensione e una base del complemento ortogonale rispetto ad f del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, k)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$;
4. si stabilisca se esistono valori di k per i quali $\mathbb{R}^3$ è somma diretta di W e $W^\perp$

Esercizio 2. Nello spazio affine euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, si considerino il fascio di piani $\mathscr{F}_1$ generato dai piani $\pi_1 : x - 2y - 1 = 0$ e $\pi_2 : y - z + 1 = 0$ e il fascio $\mathscr{F}_2$ avente per sostegno la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

i) Determinare il piano α appartenente ad $\mathscr{F}_1$ e parallelo alla retta

$$s : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \\ z = 2 + t \end{cases} .$$

ii) Determinare, se esiste, il piano γ appartenente a $\mathscr{F}_1$ e ortogonale a r.

iii) Determinare, se esiste, il piano σ appartenente sia a $\mathscr{F}_1$ che a $\mathscr{F}_2$.

iv) Giustificare sinteticamente le risposte alle richieste ii) e iii).