Algebra lineare – Geometria 1

23 marzo 2010

Esercizio 1. Si considerino i sottoinsiemi di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} a-2b+5c & b-c \\ -a-3c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$
- $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x-y+z=0,\ y+t=2x,\ \text{con } x,y,z,t \in \mathbb{R} \right\}$
- $A_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, per $k \in \mathbb{R}$.

1. Verificare che U e W sono sottospazi di$M_2(\mathbb{R})$ e determinarne la dimensione e una base;
2. determinare la dimensione e una base per $U+W$ e $U \cap W$ e stabilire se la somma $U+W$ è diretta;
3. posto $V_k =< A_k >$, determinare i valori di k per cui esiste un endomorfismo T di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ tale che $W = \ker(T)$ e $V_k = \mathrm{Im}(T)$ e, per tali valori, costruire un endomorfismo con queste proprietà.

Esercizio 2. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ k+1 & k-1 & k^2 \\ 0 & 2-k & k \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 1+k \\ k \\ 1+k \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

1. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, specificando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;
2. considerando l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ a cui è associata, rispetto alla base canonica, la matrice dei coefficienti delle incognite del sistema dato, si determinino, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la dimensione e una base per $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$.
3. si stabilisca, per $k = 0$ e per $k = -1$, se A_k è diagonalizzabile e in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.

Geometria 2

23 marzo 2010

Esercizio 1. Nel piano euclideo reale $E_2(\mathbb{R})$ si consideri il fascio di coniche

$$\mathcal{F}: \; x^2 - ky^2 + 2x + (k-5)y - 4 = 0$$

1. Determinare i punti base e le coniche degeneri e stabilire la natura del fascio $\mathcal{F}$.
2. Determinare i valori del parametro reale k per i quali:
   • la conica $\mathcal{C}_k$ di $\mathcal{F}$ sia una circonferenza, o un'iperbole equilatera;
   • la conica $\mathcal{C}_k$ ammetta un asintoto parallelo alla retta $r : x - 2y + 5 = 0$;
   • i punti $P = [(0, 1, 0)]$ e $Q = (2, 1)$ siano coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$.
3. Posto $k = 7$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_7$ determinandone centro (proprio o improprio), asintoti (se esistono e sono reali) e assi.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano otogonale, si considerino le rette

$$a_k : \begin{cases} x + y = 0 \\ (k+2)z = 1 \end{cases} , \quad b_k : \begin{cases} x + (2k-1)y = 4 \\ 3z = -k \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle due rette;
2. posto $k = 1$ determinare un'equazione cartesiana del luogo dei punti appartenenti alle rette che si appoggiano ad entrambe le rette date;
3. posto $k = 0$ si determinino rappresentazioni cartesiane per:
   • la retta t di minima distanza tra a_0 e b_0;
   • i piani paralleli su cui giacciono a_0 e b_0;
   • la circonferenza del piano $\alpha : 2x - y + 6z = 0$ avente come estremi di un diametro i punti A e B in cui il piano α interseca rispettivamente le rette a_0 e b_0.