Algebra lineare – Geometria 1

23 settembre 2008

Esercizio 1. Si consideri la funzione:

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p(x) \longmapsto (p(1), kp(-1)) \end{cases}$$

dove k è un parametro reale. Determinare al variare di k:

1. i valori di k per cui f_k è un omomorfismo
2. la matrice di f_k rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}_3[x]$ e di $\mathbb{R}^2$
3. i valori di k per cui f_k è un monomorfismo e quelli per cui è un epimorfismo
4. una base e la dimensione per $\mathrm{Im}(f_k)$ e $\ker(f_k)$;
5. un complemento diretto per $\ker(f_k)$;
6. la matrice della rappresentazione scalare di f_k rispetto alle basi $\mathscr{B}' = (1, x+x^2, x-x^2, 1-x^3)$ e $\mathscr{B}'' = ((1,-1),(0,1))$ di $\mathbb{R}_3[x]$ e di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente.

Esercizio 2. Si considerino le matrici di $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2k+4 & 1 & -k-3 \\ -k-3 & 0 & k+4 \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

1. determinare i valori di k per cui le matrici A e B_k ammettono gli stessi autovalori;
2. determinare i valori di k per cui B_k è diagonalizzabile e, per tali valori determinare una matrice diagonale D_k e una matrice invertibile M_k tali che $D_k = M_k^{-1} B_k M_k$;
3. stabilire se la matrice A è diagonalizzabile e, per ciascuno dei valori di k determinati al punto precedente, stabilire, motivando la risposta, se le matrici A e B_k sono simili;
4. determinare la matrice A^{-1} e risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = (7, 6, -2)$.

Geometria 2

23 settembre 2008

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica b la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare la dimensione e una base per il radicale della forma bilineare b;
2. determinare l'insieme dei vettori isotropi di b e stabilire se tale insieme costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
3. stabilire se il prodotto scalare b è euclideo.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ riferito ad un sistema di coordiante cartesiane ortogonali si considerino il piano $\pi :\ x + y - z = 0$ e i punti $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (1, 1, 2)$. Determinare una rappresentazione cartesiana della circonferenza di π passante per A, B e C.

Esercizio 3. Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ riferito ad un sistema di coordinate cartesiane

1. determinare l'equazione dell'iperbole equilatera $\mathcal{I}$ di centro $C = (2, 0)$, asintoto $a_1 :\ x - y - 2 = 0$ e rispetto alla quale la retta $r :\ x + 1 = 0$ è la polare del punto $P = (1, 0)$;
2. determinare un'equazione cartesiana della retta t tangente a $\mathcal{I}$ nel suo punto $T = (0, 1)$;
3. determinare una rappresentazione parametrica (ancor meglio se cartesiana) del luogo descritto dai punti medi dei segmenti di estremi il punto T e l'ulteriore punto di intersezione della retta polare di P_k con l'iperbole $\mathcal{I}$ al variare di P_k sulla retta t, e riconoscere tale luogo.