Algebra lineare – Geometria 1

23 settembre 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ si considerino gli insiemi

$$W_k = \Big\{\big((k+2)\alpha + 2(k+1)\beta + \gamma, -\beta + \gamma, 2\alpha + 2\gamma, 0\big) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\Big\}$$
$$U = \{(\alpha, \beta, 2\alpha, \alpha + \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

dove k è un parametro reale. Dopo aver verificato che W_k e U sono sottospazi vettoriali per ogni valore di k:

1. determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di W_k;
2. determinare una base e la dimensione di U;
3. determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ se il vettore $\mathbf{v} = (1, 3, 0, 0)$ appartiene a W_k.

Posto ora $k = -1$:

4. determinare una base e la dimensione di un complemento diretto di W_{-1};
5. determinare una base e la dimensione di $W_{-1} \cap U$ e di $W_{-1} + U$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f_k : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c) & \longmapsto & \big(-a + kc\ ,\ -b\ ,\ kb + (k+2)c\big). \end{array} \right.$$

1. Verificare che f_k è un endomorfismo per tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ e determinarne la matrice A_k della rappresentazione scalare rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
2. determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui f_k è iniettiva e quelli per cui f_k è suriettiva;
3. posto $k = -2$ determinare le preimmagini tramite f_{-2} del vettore $\mathbf{v} = (-1, -4, -2)$;
4. posto $k = 1$ determinare, se possibile, la funzione inversa f_1^{-1};
5. posto $k = 0$ determinare gli autovalori di A_0 e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
6. posto $k = 0$ determinare, se possibile, una matrice diagonale simile ad A_0 ma diversa da A_0 e la relativa matrice diagonalizzante.

Geometria 2

23 settembre 2009

Esercizio 1. Nel piano euclideo reale in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la retta $a: \; x - y + 3 = 0$ e i punti $B = (1, 0)$ e $C = (1, 2)$.

1. Determinare un'equazione del fascio $\mathscr{F}$ di coniche passanti per B e per C e aventi la retta a come asintoto;
2. determinare le coniche degeneri del fascio $\mathscr{F}$ e classificare quelle generali al variare del parametro;
3. determinare un'equazione cartesiana del luogo $\mathscr{L}$ descritto dai centri delle coniche di $\mathscr{F}$;
4. riconoscere e studiare il luogo $\mathscr{L}$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, si considerino il piano $\pi: \; x - y + 2z = 0$ ed il punto $P = (4/3, 2/3, 5/3)$.

1. Dopo aver osservato che $P \notin \pi$, determinare le coordinate del punto P' proiezione ortogonale di P sul piano π;
2. determinare una rappresentazione cartesiana del fascio di piani passanti per P e ortogonali a π;
3. determinare una rappresentazione cartesiana del luogo dei punti di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ che distano come P dal piano π;
4. determinare un'equazione cartesiana della sfera Σ tangente a π in P' e passante per P;
5. determinare centro e raggio della circonferenza ottenuta come sezione di Σ con il piano $\alpha: \; 2x - z - 2 = 0$;
6. determinare un'equazione cartesiana dei piani passanti per la retta $r = \alpha \cap \pi$ e tangenti a Σ.