Algebra lineare – Geometria 1

25 settembre 2007

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si considerino

i vettori $u_1 = (h, 1, h)$, $u_2 = (h, 1, -h)$, $u_3 = (0, 1+h, h)$,

il sottospazio $U = < u_1, u_2, u_3 >$

la funzione f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\forall(x, y, z)\in \mathbf{R}^3$

$$f(x, y, z) = ((h-1)x + (1-h)y - hz,\ x - y + z,\ (h+1)x + (2-h)z)$$

ove $h\in \mathbf{R}$ è un parametro.
Al variare del parametro reale h
i) si verifichi che f è un endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ e si costruiscano i sottospazi Imf e Ker$f$;
ii) si costruisca un complemento diretto per U;
iii) si stabilisca se U è un sottospazio per Imf e per Ker$f$.
Posto $h = -1$
iv) dopo avere verificato che f è diagonalizzabile, lo si diagonalizzi;
v) si individuino gli autovettori appartenenti al sottospazio U.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} x + hy + z & = 4 + h \\ (1+2h)y + (h+2)z & = -h \\ x + 2y + (h-1)z & = 0 \end{cases}$$

ove $h\in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.

Geometria – Geometria 2

25 settembre 2007

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si consideri il fascio di coniche

$$\Phi\colon xy + ky^2 - kx - 1 = 0.$$

i) Si riconoscano le coniche generatrici del fascio Φ, si stabilisca la natura del fascio, se ne determinino i punti base e le coniche degeneri.
ii) Si verifichi che nel fascio Φ vi è una sola parabola non degenere e che tutte le altre coniche non degeneri sono iperboli aventi un asintoto parallelo all'asse x.
iii) Si individui quale punto è il coniugato di P(1; 0) rispetto ad ogni iperbole non degenere del fascio Φ. Si determini, poi, l'equazione della conica Σ rispetto alla quale P è coniugato di R(-2; 0); si scriva l'equazione della retta che congiunge i punti di contatto delle tangenti a Σ condotte dal punto T(2; 1).
iv) Si determini l'equazione dell'iperbole Γ di Φ che ha un asintoto parallelo alla retta $t\colon x - 2y + 3 = 0$; si determinino le equazioni degli asintoti di Γ.
v) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo descritto dal centro della generica conica del fascio Φ.
vi) Si individuino tutte le coniche non degeneri del fascio che ammettono come diametro la retta $d\colon 2x + 1 = 0$. Detta Λ la conica tra quelle individuate avente il centro con ordinata positiva, si scriva l'equazione della tangente a Λ in S(-2; 4).

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

i punti P(0; 2; 1) e A(1; 0; 1)

e le rette: asse x, $r\colon y = -x = z + 1$ e $s\colon z = x = 1 - y$

i) Si verifichi che le rette date sono a due a due sghembe.
ii) Si scrivano le equazioni della retta n perpendicolare ed incidente a r e a s.
iii) Si determini il piano π contenente la retta s e parallelo all'asse x.
iv) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta t incidente a r e perpendicolare a s in A.
v) Si individui la circonferenza Γ con centro in P e tangente all'asse x.