Algebra lineare – Geometria 1

26 marzo 2007

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{Mat_2(R)}$ si considerino

la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

il sottoinsieme $W = \{H \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid HM = MH\}$

la funzione f: $\mathbf{Mat_2(R)} \to \mathbf{Mat_2(R)}$ tale che $\forall X \in \mathbf{Mat_2(R)}$ $f(X) = XM$.

i) Dopo avere verificato che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{Mat_2(R)}$, se ne determini una base e la dimensione.
ii) Detto A il sottospazio delle matrici antisimmetriche di $\mathbf{Mat_2(R)}$, si costruisca il sottospazio $W+A$ e si verifichi se tale somma è diretta.
iii) Si verifichi che la funzione f è un endomorfismo e si costruiscano i sottospazi Imf e Ker$f$.
iv) Dopo avere determinato i sottospazi $f(W)$ e $f(A)$, si costruisca il sottospazio $f(W)+f(A)$ e si verifichi se tale somma è diretta.
v) Indicato con V il sottoinsieme delle matrici X di $\mathbf{Mat_2(R)}$ tali che $f(X) = 2X$, si verifichi che V è un sottospazio di $\mathbf{Mat_2(R)}$ e se ne determini la dimensione.
vi) Si stabilisca se V è un complemento diretto per W.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} hx + (h+1)y + (h+2)z = 3h-1 \\ 3x + 2y + z = 2-h \\ x + y + (h-1)z = h-1 \end{cases}$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.

Geometria – Geometria 2

26 marzo 2007

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sono assegnate

la conica Σ: $x^2 + xy + y^2 - 6x - 5y + 10 = 0$

la retta r: $x + y - 4 = 0$.

i) Si riconosca la conica Σ e, se possibile, se ne individui il centro.
ii) Si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti a Σ nei punti in cui questa è intersecata dalla retta r.
iii) Si determini l'equazione della circonferenza non degenere Ω del fascio Φ e se ne indichino centro e raggio.
iv) Si individui l'iperbole equilatera non degenere K del fascio Φ e se ne scrivano le equazioni degli asintoti.
v) Detta P la parabola non degenere del fascio Φ, si scriva l'equazione della tangente a P nel punto A(-1; 1).
vi) Si determini il punto di intersezione delle tangenti comuni alle coniche del fascio Φ.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

la sfera Σ: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 9 = 0$

i piani α: $x + hy + z = 0$, β: $x - y + z = 0$, γ: $hx + y + (1-h)z = 0$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
i) Al variare del parametro h si stabilisca la posizione reciproca dei piani α, β, γ.
Posto $h = 0$:
ii) dopo avere constatato che i piani β e γ sono tra loro perpendicolari ed incidenti in una retta t, si scrivano le equazioni dei piani contenenti t e tangenti a Σ;
iii) dopo avere verificato che il piano α è secante la sfera Σ, si determinino centro e raggio della circonferenza sezione;
iv) si stabilisca la distanza del punto P(0, 1, 2) dalla retta t.