Geometria – Geometria 2

27 marzo 2006

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino la circonferenza Γ: $x^2 + y^2 - 4 = 0$ e al retta r: $2x - y = 0$.
i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti alla circonferenza Γ nei punti in cui essa è intersecata dalla retta r.
ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se nel fascio Φ ci sono parabole non degeneri.
iii) Dopo avere verificato che nel fascio Φ esiste un'iperbole equilatera non degenere Σ, se ne determini l'equazione; si scrivano le equazioni degli asintoti di Σ.
iv) Detta K la generica conica non degenere di Φ, sia C il centro di K. Si determini l'equazione cartesiana del luogo Λ descritto da C al variare di K nel fascio Φ. Si riconosca Λ.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

i punti A(1, 1, 3) e B(1, 1, -1)

e il piano α: $x + y + z - 1 = 0$.

i) Si scriva l'equazione del piano β passante per A e parallelo ad α; si determini la distanza tra α e β.
ii) Detto H il piede della retta perpendicolare condotta da A al piano α, sia γ il piano individuato da A, B, H. Si scrivano le equazioni della circonferenza Γ appartenente a γ e avente il segmento AB come diametro. Si verifichi, giustificando la risposta, se il punto H appartiene a Γ.
iii) Si scriva l'equazione del fascio Φ di piani passanti per i punti A e B. Si determini, se esiste, il piano di Φ perpendicolare ad α.

Algebra lineare – Geometria 1

27 marzo 2006

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{Mat_2(R)}$ si considerino

la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

la funzione f: $\mathbf{Mat_2(R)} \to \mathbf{Mat_2(R)}$ tale che $\forall Y \in \mathbf{Mat_2(R)}$ $f(Y) := MY$

i sottoinsiemi $U := \{X \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid MX = XM\}$, $V := \{Y \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid f(Y) = Y\}$,

i) Si verifichi che f è un automorfismo.
ii) Si verifichi che i sottoinsiemi U e V sono sottospazi; per ciascuno di essi si determinino, poi, una base e la dimensione.
iii) Si costruisca il sottospazio vettoriale $U \cap V$.
iv) Detto S il sottospazio delle matrici simmetriche di $\mathbf{Mat_2(R)}$, si stabilisca se S è complemento diretto per U.
v) Detto A il sottospazio delle matrici antisimmetriche di $\mathbf{Mat_2(R)}$, si costruiscano i sottospazi $A + U$ e $A \cap U$.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} x + 2hy + (h+4)z = h \\ 3x - 2y - hz = h + 2 \\ x + hy + z = h + 1 \end{cases}$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.