Algebra lineare – Geometria 1

27 settembre 2005

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si consideri la funzione f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$\forall(x, y, z)\in\mathbf{R}^3 \quad f(x, y, z) = (2x, x + (1-h)y, z)$$

ove $h\in\mathbf{R}$ è un parametro.

i) Dopo avere verificato che f è un endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ per ogni valore del parametro, si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
ii) Si costruiscano, al variare di $h\in\mathbf{R}$, i sottospazi vettoriali Imf e Ker$f$, e per ognuno di essi si determinino una base e la dimensione.
iii) Si stabilisca per quali valori del parametro h l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
iv) Posto $h = -1$, dopo avere verificato che f non è diagonalizzabile, si costruisca lo spazio vettoriale U somma degli autospazi di f; si verifichi che tale somma è diretta.
v) Si determini un complemento diretto per il sottospazio U.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} x - 2y + (h-1)z = h + 1 \\ 2x - 4y + 3hz = -h \\ -x + 2y + (h+5)z = 1 - h \end{cases}$$

ove $h\in\mathbf{R}$ è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.
Indicato con S l'insieme delle soluzioni, si verifichi se S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. In caso di risposta negativa, si costruisca la chiusura di S.

Geometria – Geometria 2

27 settembre 2005

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si consideri il fascio di coniche

$$\Phi: x^2 + (k+4)xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

i) Si riconoscano le coniche generatrici del fascio Φ, si stabilisca la natura del fascio, se ne determinino i punti base e le coniche degeneri.
ii) Si stabilisca, giustificando la riposta, se nel fascio Φ vi sono circonferenze, parabole e iperboli equilatere non degeneri.
iii) Si individui la conica Σ non degenere del fascio Φ che ha come diametro al retta d: $x - 1 = 0$. Si riconosca Σ.
iv) Si verifichi che il polo della retta r: $x + y - 1 = 0$ non dipende dalla conica non degenere del fascio Φ.
v) Si determini l'equazione della conica Γ che ammette un asintoto parallelo alla retta
s: $3x + y + 7 = 0$. Si determinino le equazioni degli asintoti di Γ.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

il punto A(1, 0, 1)

e i piani π: $x + (h^2+1)y - z = 2 - h$ e σ: $2x + (5-h^2)y - 2h^2z = 2h$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
i) Al variare di h si stabilisca la posizione reciproca dei piani π e σ.
Posto $h = 0$
ii) dopo avere verificato che i piani π e σ sono incidenti in una retta r, si determini la distanza di A da r;
iii) si scrivano le equazioni della retta passante per A e parallela a r;
iv) si scrivano le equazioni della circonferenza avente centro in A e tangente alla retta r.