Algebra lineare – Geometria 1

27 settembre 2006

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si consideri la funzione f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\forall(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$

$$f(x, y, z) = ((k+2)x + (2h+k)y - kz, 2x + ky + (h+2k)z, x + (h+k)z + k - 1)$$

ove $h, k \in \mathbf{R}$ sono parametri.
Si determinino i valori dei parametri h, k per i quali f è un endomorfismo. Per tali valori:
i) si costruiscano i sottospazi vettoriali Imf e Ker$f$;
ii) si stabilisca se il vettore $v = (-h, k, h-k)$ appartiene a Imf; in caso di risposta affermativa si determinino le preimmagini di v.

2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si consideri l'endomorfismo f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\forall(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$

$$f(x, y, z) = (hx + z, 2x + 2y + hz, x)$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
i) Si verifichi che f è un automorfismo per ogni valore di h.
ii) Al variare del parametro h si determinino gli eventuali autovalori reali dell'endomorfismo f e le rispettive molteplicità algebriche.
iii) Si stabilisca per quali valori di h l'automorfismo f ammette l'autovalore $\lambda = 1$. Per tali valori del parametro si stabilisca se f è diagonalizzabile; in caso di risposta affermativa si diagonalizzi f.
iv) Si stabilisca se esistono valori di h tali che il vettore $v = (0, h, 2h-3)$ è un autovettore; per tali valori si costruisca l'autospazio al quale v appartiene.

Geometria – Geometria 2

27 settembre 2006

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti in O(0; 0) all'asse y e in A(1; 1) alla retta t: $y - 1 = 0$.
i) Nel fascio Φ si individui la conica non degenere Γ che ammette come diametro la retta d: $x + y = 0$. Si riconosca Γ.
ii) Si determinino le coniche non degeneri Σ del fascio rispetto alle quali le rette
r: $2x - y + 1 = 0$ e s: $4x + 5y - 3 = 0$ sono coniugate
iii) Si individui la conica non degenere Ω di Φ che ha centro in C(-1; 2). Dopo avere constatato che Ω è un'iperbole, si determinino le equazioni degli asintoti di tale iperbole.
iv) Si considerino la circonferenza K del fascio Φ e i punti S(1; 2) e T(1/2; 0); si determinino le coordinate del punto R coniugato, rispetto a K, sia di S sia si T.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

il piano π: $x - 2y + z = 0$

e le rette r: $x + y - 2 = x - y = 0$ e s: $x + z - 2 = x - z = 1$.

i) Dopo avere constatato che le rette r e s sono sghembe e ortogonali, si determini la retta perpendicolare ed incidente r e s e si calcoli la minima distanza tra r e s.
ii) Dopo avere verificato che il piano π è intersecato in un punto A dalla retta r e in un punto B dalla retta s, si scrivano le equazioni della circonferenza Γ del piano π che ha il segmento AB come diametro.
iii) Si calcoli la distanza del punto A dalla retta s.
iv) Si scriva l'equazione del piano ρ contenente la retta r e perpendicolare al piano π.
v) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo Λ delle rette parallele al piano π e incidenti le rette r e s.