Geometria I

1 luglio 2014

Esercizio 1. Nel piano proiettivo complesso, siano $A(2;2)$ e $B(0;1)$ e $C(0;8)$ tre punti e sia t_A la retta di equazione $x - y = 0$.

(a) Determinare un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle circonferenze che passano per A e B. $[4x + 2y - 7 = 0]$ $\boxed{3}$

(b) Determinare un'equazione cartesiana della circonferenza passante per A e B e tangente in A alla retta t_A, e verificare che passa per il punto C. $[x^2 + y^2 + x - 9y + 8 = 0]$ $\boxed{4}$

(c) Scrivere un'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per B e C e tangenti in A alla retta t_A.
$[(1+k)x^2 - xy + ky^2 + kx - 9ky + 8k = 0$ oppure $(3+k)x^2 - (5+k)xy - 2y^2 - 2x + 18y - 16 = 0]$ $\boxed{3}$

(d) Classificare in modo affine e proiettivo la conica di equazione:

$$y^2 + xy + x - 9y + 8 = 0,$$

dopo aver verificato che appartiene al fascio $\mathcal{F}$. Trovare le coordinate del suo centro e le direzioni degli assi. $[C(11; -1), \quad [(1, 1 \pm \sqrt{2}, 0)]]$ $\boxed{6}$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ sia A_k la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 2k & k & k-1 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

al variare del parametro reale k.

(a) Studiarne il rango, al variare di k. $[\mathrm{rg} A_k = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}]$ $\boxed{3}$

(b) Determinare, solo per $k = 0$, le dimensioni e le basi dei due sottospazi $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$, dove $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è l'omomorfismo rappresentato tramite la matrice A_k, scritta rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
$[\mathrm{dimKer} f = 1, \mathrm{Ker} f =< (0,1,0) > \ \mathrm{dimIm} f = 2, \mathrm{Im} f =< (1,0,\sqrt{3}), (\sqrt{3}, -1, 3) >]$ $\boxed{4}$

(c) Nel caso $k = 1$ diagonalizzare la matrice A_1, indicando anche la matrice diagonalizzante. $[D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}]$ $\boxed{5}$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo reale sono dati il punto $A(2;0;3)$ e il piano γ di equazione $y = 0$.

(a) Determinare le equazioni del luogo dei punti B del piano γ che distano 3 da A. $[\begin{cases} x^2 + z^2 - 4x - 6z + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}]$ $\boxed{3}$

(b) Determina le coordinate del punto C tale che il triangolo ABC sia rettangolo in A e abbia area 6. $[C(2;\pm 4;3)]$ $\boxed{3}$