Geometria I

3 luglio 2012

Esercizio 1. Nel piano affine reale $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$, studiare le posizioni reciproche (a due a due e tutte e tre insieme) delle rette r, s, t, discutendo il sistema:

$$\begin{cases} x + hy = 3 & (r) \\ 2x + 4y = 6 & (s) \\ hx = 1 & (t) \end{cases},$$

al variare di $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. [Per $h = 2$: r coincid. s, t incidente r; per $h = 1/3$: r,s,t appartengono al fascio proprio di centro $(3; 0)$; per $h \neq 2, 1/3$ le rette sono a due a due incidenti (e non appartengono allo stesso fascio).] $\boxed{3}$

Esercizio 2. Considerata l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2)$ tale che $\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(a, b, c) = (a + b, c)$$

(a) dimostrare che l'applicazione f è un omomorfismo; $\boxed{2}$

(b) scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$; [$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$] $\boxed{2}$

(c) determinare una base e la dimensione di $\ker f$ e di $\operatorname{Im} f$; [$\ker f =< (1, -1, 0) >$; $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$] $\boxed{2}$

(d) posto $S := f^{-1}(\vec{v})$, dove $\vec{v} = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$, dire (motivandolo) se S è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinare una base per la sua chiusura. [A non è sottospazio di $\mathbb{R}^3$; $< A >=< \ (1, -1, 0), (0, 1, -1) \ >$] $\boxed{3}$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ siano, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$r : \begin{cases} x - kz = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = k - t \\ z = kt \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Determinare:

(a) le posizioni reciproche delle due rette, al variare del parametro k; [Se $k \neq 2, \pm 1$ le rette sono sghembe. Negli altri casi sono incidenti] $\boxed{2}$

(b) posto $k = 2$, un'equazione cartesiana del piano che le contiene; [$x + y = 3$] $\boxed{2}$

(c) posto $k = 0$, le equazioni dei piani paralleli su cui r ed s giacciono. [$x+y-2z-3 = 0 (r)$, $\quad x + y - 2z - 1 = 0 (s)$] $\boxed{2}$

Esercizio 4. Nel piano proiettivo complesso, siano $a_1 : x = 2$ e $a_2 : x = 2y$ due rette.

(a) Scrivere un'equazione per il fascio $\mathscr{F}$ di coniche per le quali le rette a_1 e a_2 sono asintoti, motivando il procedimento. [$\mathscr{F}\ :\ (x-2)(x-2y)+k=0, k\in\mathbb{R}$] $\boxed{2}$

(b) Verificato che un'equazione per $\mathscr{F}$ è

$$x^2-2xy-2x+4y+k=0,$$

classificare il fascio dal punto di vista affine e proiettivo e determinare le coordinate del centro delle coniche di $\mathscr{F}$. [Si tratta di iperboli. Generali se $k\neq 0$, degeneri se $k=0$. Centro: $(2;1)$.] $\boxed{4}$

(c) Determinare un'equazione della conica $\mathscr{C}$ di $\mathscr{F}$ rispetto alla quale la retta $p\ :\ x+y=0$ è la polare del punto $P(1;-1)$. [$x^2-2xy-2x+4y+3=0$] $\boxed{2}$