Geometria I (completo)

3 settembre 2013

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo tra spazi vettoriali definito, al variare del parametro reale k, da:

$$f_k(x, y, z) = (x + z, ky, x, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinare, al variare di k, una base per il nucleo e una base per l'immagine di f_k. [Se $k = 0$, $\mathrm{Ker} f_0 =< (0; 1; 0) >$, $\mathrm{Im} f_0 =< (1; 0; 1; 0), (1; 0; 0; 1) >$. Altrimenti $\mathrm{Ker} f_k = \{\vec{0}\}$, $\mathrm{Im} f_k =< (1; 0; 1; 0), (1; 0; 0; 1), (0; 1; 0; 0) >$] $\boxed{4}$

(b) Posto $k = 0$, dire per quali $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\vec{v} = (3h, 0, h, 2h)$ appartiene all'immagine di f_0. Nei casi in cui vi appartenga, determinarne l'insieme delle preimmagini. [$\vec{v} \in \mathrm{Im} f_0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. $f^{-1}(\vec{v}) = \{(h, y, 2h) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \in \mathbb{R}\}$.] $\boxed{4}$

(c) Posto $k = 0$, trovare una base per il complemento diretto di $\mathrm{Im} f_0$ in $\mathbb{R}^4$; [Ad es. $< (0; 1; 0; 0), (0; 0; 1; 0) >$] $\boxed{2}$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $A(1; 1; 2)$ e $B(-1; 1; 0)$.

(a) Verificare che la retta passante per A e B è sghemba con l'asse x. $\boxed{3}$

(b) Determinare il punto C dell'asse x equidistante da A e da B. [$C(1; 0; 0)$] $\boxed{4}$

(c) Scrivere un'equazione cartesiana del piano per A, B, e C. [$x + 2y - z - 1 = 0$] $\boxed{2}$

(d) Determinare le coordinate del centro della circonferenza passante per A, B e C. [$\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right)$] $\boxed{4}$

Esercizio 3. (a) Nel piano euclideo reale determinare l'equazione del fascio di coniche passanti per i punti $P(0; 1)$ e $Q(0; 3)$ e tali che l'asse y sia la polare del punto $R(2; 1)$. [$kx^2 + xy + y^2 - x - 4y + 3 = 0$] $\boxed{4}$

(b) Verificato che l'equazione $kx^2 + xy + y^2 - x - 4y + 3 = 0$ rappresenta , determinare la parabola non riducibile di e il suo asse. [$x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 16y + 12 = 0$; asse: $5x + 10y - 18 = 0$] $\boxed{3}$

(c) Determinare la conica di avente centro in $C(4; 0)$ e riconoscerla. [Iperbole: $x^2 + 8xy + 8y^2 - 8x - 32y + 24 = 0$] $\boxed{3}$