Geometria I (completo)

4 giugno 2013

Esercizio 1. Sia k un parametro reale e sia $M_k \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ la matrice:

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Studiare, al variare di k, la diagonalizzabilità di M_k; $\boxed{5}$
[Diagonalizzabile per $k \neq \pm 1$]

(b) Determinare gli autovalori e le basi degli autospazi nel caso $k = 1$; $\boxed{3}$
[Due autovalori: 1 con ma=2 e mg=1; -1 con ma=1=mg]

(c) Diagonalizzare la matrice e indicare la matrice diagonalizzante per $k \neq \pm 1$; $\boxed{3}$
[$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k^2-1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$]

(d) Posto $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f_k(\vec{v}) := M_k \vec{v}$ per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, assegnare a k un valore che renda il nucleo di f_k non banale e, in tal caso, scrivere una base per l'immagine di f_k. $\boxed{2}$
[$k = 0$, $\mathrm{Im} f_0 =< (0,0,1), (1,0,0) >$]

(e) Posto $k = 0$, dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il vettore $(2a; 0; a)$ appartiene all'immagine di f_0 e determinarne le preimmagini. $\boxed{3}$
[$\{(a; 2a - z; z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \in \mathbb{R}\}$]

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ siano:

$$r : \begin{cases} 2y + z = 6 \\ x + z = 1 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x + z = -2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

due rette.

(a) Verificare che le rette sono sghembe e non sono ortogonali. $\boxed{2}$

(b) Determinare un'equazione del fascio $\mathscr{F}$ di piani paralleli a r e s. $\boxed{2}$
[$x + z = k, k \in \mathbb{R}$]

(c) Tra i piani di $\mathscr{F}$ determinare un'equazione di quello equidistante alle due rette date. [$2x + 2z - 1 = 0$] $\boxed{3}$

(d) Scrivere le equazioni cartesiane della retta t, proiezione ortogonale di r sul piano di equazione $x + 2y = 8$. $\boxed{4}$
[$4x - 2y + 3z + 2 = 0 = x + 2y - 8$]

Esercizio 3. Nel piano euclideo reale, sia $\mathscr{C}$ il fascio di circonferenze tangenti nell'origine all'asse y. $\boxed{3}$
Siano: P il punto di coordinate $(0; 1)$; p la polare di P rispetto alla generica circonferenza di $\mathscr{C}$ ed $R \neq (0; 0)$ l'intersezione di p con la circonferenza stessa.
Scrivere l'equazione cartesiana del luogo $\mathscr{L}$ descritto dal punto R al variare della circonferenza di $\mathscr{C}$ e riconoscere il luogo. $\boxed{3}$
[Circonferenza di centro P e raggio 1: $x^2 + y^2 - 2y = 0$]