Geometria I

5 luglio 2011

Esercizio 1. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche. $[1, k+1, 2]$ $[k \neq 0 \wedge k \neq 1 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1;]$
$[k = 0 : m_a(1) = 2, m_g(1) = 1, m_a(2) = 1, m_g(2) = 1;]$
$[k = 1 : m_a(1) = m_g(1) = 1, m_a(2) = 2, m_g(2) = 1.]$

(b) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile; $[k \neq 0 \wedge k \neq 1]$

(c) posto $k = 3$ si determini una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante. $\left[D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 13 & 1 \end{pmatrix} \right]$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri l'endomorfismo:

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c, d) \longmapsto (2a + 2c, 3b + kd, 3a + 2b, ka) \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

(a) Determinare la matrice della rappresentazione scalare di f_k rispetto alla base canonica; $\left[A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & k \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

(b) Determinare i valori di k per cui f_k non è un automorfismo; $[k = 0]$

(c) per ciascuno dei valori di k trovati al punto precedente determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$.
$[\ker f = \langle (0,0,0,1) \rangle, dim = 1; \operatorname{Im} f = \langle (1,0,0,0)(0,1,0,0)(0,0,1,0) \rangle dim 3]$

Esercizio 3. Dato in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ fascio $\mathscr{F}_k$ di coniche di equazione

$$(k-1)x^2 + 2(k+1)xy + (k-1)y^2 + 2x - 2y = 0,$$

(a) studiare tale fascio, determinando i punti base e classificando le coniche dal punto di vista affine e proiettivo. [Fascio di coniche bitangenti, con punti base $(0;0)$ e $(1;-1)$, entrambi di molteplicità 2. La conica degenere che si ottiene per $k=0$ ha equazione $(x-y)(x-y-2)=0$; l'altra, non espressa in $\mathscr{F}_k$, ha equazione $(x+y)^2=0$. Se $k<0$ si hanno ellissi generali, se $k>0$ iperboli generali]

(b) detta $\mathscr{C}$ la conica di $\mathscr{F}_k$ passante per il punto P di coordinate $P=\left(\frac{2}{3};0\right)$, determinarne le coordinate del centro, le equazioni degli asintoti e degli assi;
[$\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; assi: $x+y=0$, $x-y-1=0$; asintoti: $3x+(1\pm 2i\sqrt{2})y\pm i\sqrt{2}-1=0$]

(c) determinare un'equazione della tangente a $\mathscr{C}$ nel punto P.
[$3x+5y-2=0$]

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, sono date le rette r_h ed s_h di equazioni:

$$r_h \ : \ \begin{cases} x-1=0 \\ 2y+hz-h-2=0 \end{cases} \qquad s_h \ : \ \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ z-h=0 \end{cases} ,$$

dove h è un parametro reale.

(a) Studiare le posizioni reciproche di tali rette al variare del parametro.
[Incidenti se $h=0$ o $h=1$; sghembe altrimenti]

(b) Posto $h=1$, scrivere:

(b.1) le coordinate del punto X di intersezione tra r_1 ed s_1 e un'equazione del piano che le contiene;
[$(1;1;1)$, $6x+2y+z-9=0$]

(b.2) le equazioni cartesiane della retta t passante per il punto X e ortogonale al piano π in cui esse sono contenute;
[$x-6z+5=0=y-2z+1$]

(b.3) le coordinate dei punti appartenenti a t che distano $\sqrt{41}$ da π.
[$(7;3;2), (-5;-1;0)$]