Geometria I (completo)

Lunedì 8 febbraio 2016

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ è dato il sottoisieme:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \ : \ a_{11} = a_{21} = a_{22} \right\}$$

e l'endomorfismo T tale che:

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} - 3a_{21} + 2a_{22} & a_{21} - a_{11} \\ a_{22} - a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Dopo aver verificato che M è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, determinarne una base e la dimensione. $\boxed{3}$

(b) Indicato con S il sottospazio delle matrici simmetriche di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, determinare una base per il sottospazio $S + M$ e una per il sottospazio $S \cap M$ $\boxed{4}$

(c) Costruire un complemento diretto per $S \cap M$. $\boxed{2}$

(d) Verificare che $\ker T = M$. $\boxed{2}$

(e) Indicare una base per il sottospazio $\mathrm{Im}\, T$. $\boxed{2}$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia q la forma quadratica tale che:

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + 2zt - t^2$$

(c) Dopo aver scritto il prodotto scalare f individuato da q, verificare che la base canonica di $\mathbb{R}^4$ non è ortogonale rispetto ad f e determinare una base ortogonale che contenga il maggior numero possibile di vettori della base canonica. $\boxed{4}$

(d) Sia $U =< (1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0) >$, determinare una base per $U^\perp$ e stabilire se $U^\perp$ è complemento diretto per U. $\boxed{3}$

Esercizio 3. Nel piano affine euclideo è dato il fascio $\mathscr{F}$ di coniche:

$$\mathscr{F} \ : \ 2x^2 + y^2 + kxy - 6x + 4y + 4 = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(a) Dopo aver riconosciuto le coniche generatrici del fascio, studiare la natura di $\mathscr{F}$ e deteterminarne punti base e coniche degeneri. $\boxed{6}$

(c) Determinare l'equazione della conica $\mathscr{C}$ del fascio $\mathscr{F}$ che ammette come diametro la retta $d \; : \; x + y = 0$. Riconosciuta $\mathscr{C}$, indicare le direzioni dei suoi assi e l'equazione della retta t, tangente a $\mathscr{C}$ in $P(2; 0)$. $\boxed{4}$

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette

$$r \; : \; \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s \; : \; \begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Scrivere l'equazione della sfera Σ che ha il centro sulla retta r ed è tangente alla retta s nel punto $Q(1; 1; 1)$ $\boxed{4}$