

Geometria I (completo)

9 luglio 2013

Esercizio 1. Siano $M_k \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ e $v_k \in \mathbb{R}^3$ la matrice e il vettore seguenti:

$$M_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2k+1 \\ 3 & 1 & k+2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k+1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- (a) Stabilire, al variare di k , il rango della matrice M_k . [Se $k \neq -1, 0$, $\text{rg}(M_k) = 3$; altrimenti, $\text{rg}M_k = 2$.] 3
- (b) Determinare, al variare di k , la compatibilità del sistema $M_k \vec{x} = \vec{v}_k$ e il numero delle soluzioni. [Il sistema è compatibile per $k \neq 0$. Se $k \neq 0, -1$ ammette soluzione unica, se $k = -1$, ha ∞^1 soluzioni.] 3
- (c) Nei casi in cui il sistema è risolubile dire se l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di \mathbb{R}^3 , motivando la risposta. 2
- (d) Scrivere una base per la chiusura dell'insieme delle soluzioni nel caso $k = -1$. [$\langle (1, -3, 0), (-2, 5, 1) \rangle$] 3

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ siano:

$$a : \begin{cases} x + 3y = 7 \\ y - z = 0 \end{cases}, \quad b : \begin{cases} x - y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

due rette. Determinare:

- (a) la posizione reciproca delle due rette e le coordinate dell'eventuale punto di intersezione; [Le rette sono incidenti in $(1; 2; 2)$] 5
- (b) un'equazione cartesiana del piano che contiene entrambe le rette; [$x - y + 4z - 7 = 0$] 3
- (c) le coordinate del punto X appartenente a b tale che il triangolo AXB sia rettangolo in X e abbia area $6\sqrt{2}$, essendo $B(1; 2; 2)$ e A appartenente alla retta a . [Due soluzioni: $X_1(-1; 0; 2)$, $X_2(3; 4; 2)$] 5

Esercizio 3. Nel piano proiettivo, è dato il fascio di coniche, al variare del parametro reale k :

$$\mathcal{F} : kx^2 + 2(k+1)xy + ky^2 + 4x + 1 = 0.$$

- (a) Indicare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali si ottengono coniche generali. [$k \neq -\frac{1}{6}$] 2
- (b) Studiare il fascio dal punto di vista affine. [Per $k < -\frac{1}{2}$ ellisse (generale), per $k = -\frac{1}{2}$ parabola (generale), per $k > -\frac{1}{2}$ iperbole (degenere per $k = -\frac{1}{6}$)] 3
- (c) Determinare le equazioni delle coniche generatrici del fascio e classificarle dal punto di vista proiettivo. [$(x+y)^2 = 0$ conica doppiamente degenere, $2xy + 4x + 1 = 0$ conica generale] 3