Geometria I

9 settembre 2014

Esercizio 1. (a) Sia λ un parametro reale; discutere la risolubilità del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

[Per $\lambda \neq 7$ il sistema non ha soluzioni; per $\lambda = 7$ ne ha ∞^1.] $\boxed{4}$

(b) Indicato con S il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema, dire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.[$S = \left\{\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \gamma\right) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \gamma \in \mathbb{R}\right\}$ non è sottospazio di $\mathbb{R}^3$.] $\boxed{3}$

(c) In caso di risposta negativa, determinarne la chiusura. [$< S >=< (1; -3; 0); (0; 0; 1) >$] $\boxed{3}$

Esercizio 2. (a) Nello spazio euclideo reale, determinare la posizione della retta r rispetto alla retta t, dove:

$$r \ : \ \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad t \ : \ \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -3t \end{cases}.$$

[Sghembe] $\boxed{3}$

(b) Scrivere le equazioni della circonferenza tangente nell'origine alla retta r, con essa complanare e avente il centro sulla retta t. [$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \frac{8}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}z = 0 \\ 30x - y - 81z = 0 \end{cases}$] $\boxed{7}$

Esercizio 3. (a) Nel piano affine euclideo reale, determinare un'equazione del fascio di coniche avente come punti base:

$$O(0; 0), \quad A(1; 0), \quad B(1; 1), \quad D(0; 1).$$

[$kx^2 + y^2 - kx - y = 0$] $\boxed{4}$

(b) Elencare le equazioni delle coniche degeneri di tale fascio.
[$y(y-1) = 0, \qquad x(x-1) = 0, \qquad (x-y)(x+y-1) = 0$] $\boxed{1}$

(c) Determinare le coordinate del centro delle coniche del fascio. $\left[\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\right]$ $\boxed{2}$

(d) Determinare un'equazione della conica che ha come punti coniugati $P(3;0)$ e $P'(0;-1)$. Studiare tale conica, effettuando la classificazione affine e proiettiva e determinando le equazioni dei suoi assi e le coordinate dei suoi vertici. [$x^2+3y^2-x-3y=0$, ellisse generale, assi: $x=1/2$, $y=1/2$, vertici: $V_{1,2}=\left(\frac{1}{2},\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}\right)$, $V_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $V_4\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$] $\boxed{5}$